Université de Lille **Département de Mathématiques** **M.Fradon**
MASS L3 S5 **Probabilités Approfondies** **2018-2019**

Examen de seconde session, 17 juin 2019
durée : 2 heures
Sans documents. Tout matériel électronique interdit.

Ex 0. Soit Ω un ensemble, $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω et μ une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On se donne une fonction f mesurable positive de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne. Donner la définition de l'intégrale de Lebesgue $\displaystyle\int_\Omega f \, d\mu$.

Ex 1. Pour modéliser un déplacement aléatoire, on utilise l'ensemble $\Omega = \{N, S, E, W\}$ des quatre directions : nord, sud, est et ouest. On définit sur Ω

— une fonction f qui quantifie la variation de longitude : $f(N) = f(S) = 0$ et $f(E) = -1$ et $f(W) = 1$

— une fonction g qui mesure la distance parcourue : $g(N) = g(S) = g(E) = g(W) = 1$

1) Soit $\mathcal{F}$ la plus petite tribu sur Ω qui contient $\{N, S\}$. donner la liste des éléments de $\mathcal{F}$.

2) On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. Les fonctions f et g sont-elles $\mathcal{F}$-mesurables ? (justifier)

3) Déterminer l'ensemble de toutes les fonctions de Ω vers $\mathbb{R}$ qui sont $\mathcal{F}$-mesurables.

Ex 2. On rappelle que pour toute fonction borélienne positive f sur $\mathbb{R}$, l'intégrale de f par rapport à la mesure de comptage $\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k$ sur $\mathbb{N}$ est égale à la série : $\int_\mathbb{R} f \, d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)$. Calculer, en justifiant les calculs, la limite quand n tend vers l'infini de la somme de la série $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1 + \cos(nk)}{(n+k)^k}$

Ex 3. **Abreuvoir automatique**

Un élevage est équipé d'un abreuvoir automatique qui ne peut être utilisé que par un animal à la fois. On suppose qu'à chaque minute, il y a une probabilité $\frac{1}{2}$ qu'un seul animal vienne boire, une probabilité $\frac{1}{6}$ que deux animaux viennent boire et une probabilité $\frac{1}{3}$ qu'aucun animal ne vienne. Si un animal qui arrive trouve l'abreuvoir libre, il boit pendant une minute et s'en va, sinon il attend. On suppose qu'il n'y a jamais plus de deux animaux en attente, c'est-à-dire qu'un animal qui trouve l'abreuvoir occupé avec déjà deux bêtes en attente renonce à boire et s'en va (de même, si deux animaux arrivent en même temps et qu'il y a déjà une bête en attente, un seul des deux arrivants fait la queue et l'autre renonce).

On note X_n le nombre d'animaux au temps n à l'abreuvoir (en attente ou en train de boire). A l'instant 0 (mise en service de l'abreuvoir) on a $X_0 = 0$.

1) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène. Quel est son espace d'états ? Tracer le graphe correspondant et donner la matrice de transition π.

2) A l'instant 0, l'abreuvoir est inutilisé. Calculer la probabilité qu'il soit utilisé pour la

première fois à l'instant k. Au bout de combien de temps, en moyenne, commence-t-il à être utilisé ?

3) Sachant qu'à l'instant 0 il n'y aucun animal à l'abreuvoir, calculer la probabilité qu'un animal qui se présente seul à l'instant 3 n'ait pas à attendre.

4) Si à l'instant 10 il y a deux bêtes en attente, calculer la probabilité que la situation soit la même à l'instant 15 et que l'abreuvoir soit resté inutilisé au moins une minute entre-temps.

5) X_n a-t-elle une loi limite quand n devient grand ? Si oui, la calculer. Que peut-on en déduire sur la convergence éventuelle (et la limite) de la suite des π^n ?

6) L'éleveur est prêt à investir dans un second abreuvoir si, plus de la moitié du temps, il y a deux animaux en attente. Il reste un long moment à coté de l'abreuvoir après sa mise en service et observe la proportion de temps où deux animaux attendent. Que constate-t-il ? Doit-il installer un deuxième abreuvoir ?

Examen de seconde session du 17 juin 2019, corrigé

Ex 1.

1) La plus petite tribu sur $\Omega = \{N, S, E, W\}$ qui contient $\{N, S\}$ est

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{N, S\}, \{E, W\}\}$$

car cet ensemble est stable par passage au complémentaire et par union et intersection dénombrable.

2) La fonction f définie sur Ω par $f(N) = f(S) = 0$ et $f(E) = -1$ et $f(W) = 1$ n'est pas $\mathcal{F}$-mesurable puisque $\{1\} = [1; 1]$ est un borélien de $\mathbb{R}$ et $f^{-1}(\{1\}) = \{W\} \notin \mathcal{F}$.

La fonction g de distance parcourue qui satisfait $g(N) = g(S) = g(E) = g(W) = 1$ est $\mathcal{F}$-mesurable car

$$\forall B \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}) \quad g^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F} \text{ si } 1 \notin B \\ \Omega \in \mathcal{F} \text{ si } 1 \in B \end{cases}$$

3) Prouvons que l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}$-mesurables de Ω vers $\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions h de Ω dans $\mathbb{R}$ telles que $h(N) = h(S)$ et $h(E) = h(W)$.

Si par exemple $h(N) \neq h(S)$, le borélien $[h(N); h(N)]$ a pour image réciproque par h une partie de Ω qui contient N mais pas S, donc qui n'appartient pas à $\mathcal{F}$. La fonction n'est donc pas $\mathcal{F}$-mesurable. De même si $h(E) \neq h(W)$.

Si par contre $h(N) = h(S)$ et $h(E) = h(W)$ on a

$$\forall B \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}) \quad h^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F} \text{ si } h(N) \notin B \text{ et } h(E) \notin B \\ \{N, S\} \in \mathcal{F} \text{ si } h(N) \in B \text{ et } h(E) \notin B \\ \{E, W\} \in \mathcal{F} \text{ si } h(N) \notin B \text{ et } h(E) \in B \\ \Omega \in \mathcal{F} \text{ si } h(N) \in B \text{ et } h(E) \notin B \end{cases}$$

donc h est $\mathcal{F}$-mesurable.

Ex 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la série $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1 + \cos(nk)}{(n + k)^k}$ converge car $0 \leq \frac{1+\cos(nk)}{(n+k)^k} \leq 2(\frac{1}{2})^k$ pour tout $k \geq 1$.

S_n est l'intégrale par rapport à la mesure de comptage $\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k$ de la fonction positive f_n définie sur $\mathbb{N}$ par $f_n(k) = \frac{1+\cos(nk)}{(n+k)^k}$ (et valant 0 sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ si on tient à la définir sur tout $\mathbb{R}$ mais ceci est sans importance puisque $\mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = 0$).

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1+\cos(nk)}{(n+k)^k} = 0$. Et pour $k = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{1+\cos(nk)}{(n+k)^k} = 2$. Donc la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction $f = 2 \times \mathbf{1}_{\{0\}}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad |f_n(k)| = \left| \frac{1 + \cos(nk)}{(n + k)^k} \right| \leq \frac{2}{(1 + k)^k}$$

La fonction positive définie par $h(k) = \frac{2}{(1+k)^k}$ pour tout k est intégrable par rapport à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ puisque

$$\int_{\mathbb{R}} f \ d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(1+k)^k} \leq 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(2)^k} < +\infty$$

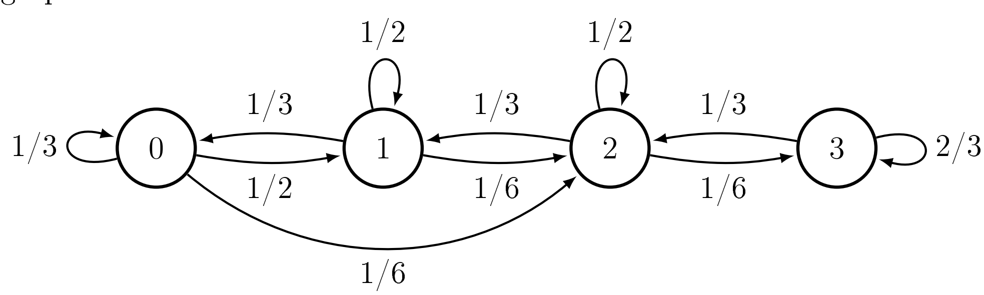
Le théorème de convergence dominée assure que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \ d\mu = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n \ d\mu = \int_{\mathbb{R}} 2 \times \mathbf{1}_{\{0\}} \ d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} 2 \times \mathbf{1}_{\{0\}}(k) = 2$$

i.e. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1+\cos(nk)}{(n+k)^k} = 2.$

Ex 3. Abreuvoir automatique

1) Le nombre X_n d'animaux en attente ou en train de boire à l'instant n peut valoir 0, 1, 2 ou 3, pas plus puisqu'il n'y a jamais plus de deux animaux en attente. L'espace d'états est donc $E = \{0, 1, 2, 3\}$. Puisque à chaque minute, il y a une probabilité $\frac{1}{2}$ qu'un seul animal vienne boire, une probabilité $\frac{1}{6}$ que deux animaux viennent boire et une probabilité $\frac{1}{3}$ qu'aucun animal ne vienne, et qu'un animal qui trouve l'abreuvoir occupé avec déjà deux bêtes en attente renonce à boire, le graphe est :



$$\pi = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

2) A chaque minute indépendamment, la probabilité que l'abreuvoir ne soit pas encore utilisé est de 1/3. Le nombre de minutes jusqu'à la première où il est utilisé suit donc la loi géométrique de paramètre 2/3, qui a pour espérance 3/2 : en moyenne, l'abreuvoir commence à être utilisé au bout de 1,5 minutes. La probabilité qu'il soit utilisé pour la première fois à l'instant k est $\frac{2}{3}(\frac{1}{3})^{k-1}$.

3) La probabilité qu'un animal qui se présente seul à l'instant 3 n'ait pas à attendre est la probabilité qu'à l'instant précédent il n'y ait que zéro ou un animal à l'abreuvoir :

$$\begin{aligned}
&P(X_2 \in \{0,1\} | X_0 = 0) \\
&= P(X_2 = 0 | X_0 = 0) + P(X_2 = 1 | X_0 = 0) \\
&= P(X_2 = 0, X_1 = 0 | X_0 = 0) + P(X_2 = 0, X_1 = 1 | X_0 = 0) \\
&\quad + P(X_2 = 1, X_1 = 0 | X_0 = 0) + P(X_2 = 1, X_1 = 1 | X_0 = 0) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{25}{36}
\end{aligned}$$

4) Sachant que $X_{10} = 3$, on ne peut avoir $X_{15} = 3$ en étant passé par l'état 0 que par une seule trajectoire :

$$\begin{aligned}
&P(X_{15} = 3 \text{ et } X_n = 0 \text{ pour un } n | X_{10} = 3) \\
&= P(X_{15} = 3, X_{14} = 2, X_{13} = 0, X_{12} = 1, X_{11} = 2 | X_{10} = 3) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{972}
\end{aligned}$$

5) La chaine est irréductible (tout état est accessible à partir des autres) donc tous les états ont la même période, qui vaut 1 car $P(X_1 = 0|X_0 = 0) > 0$ par exemple. La chaine est donc apériodique. Toute chaine de Markov homogène, irréductible et apériodique sur l'espace d'états fini $E = \{0, 1, 2, 3\}$ converge en loi vers son unique probabilité invariante μ. Pour calculer cette probabilité limite μ, on cherche d'abord si la chaine a une probabilité réversible (c'est plus facile) car on sait qu'une réversible est toujours invariante.

$$\mu = (a, b, c, d) \text{ réversible} \iff \begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{b}{3} \\ \frac{a}{6} = 0 \\ \frac{b}{6} = \frac{c}{3} \\ \frac{c}{6} = \frac{d}{3} \end{cases} \iff a = b = c = d = 0 \quad \text{impossible!}$$

Pas de probabilité réversible. On cherche alors la probabilité invariante :

$$(a, b, c, d) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = (a, b, c, d)$$

$$\iff \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{3}, \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}, \frac{a}{6} + \frac{b}{6} + \frac{c}{2} + \frac{d}{3}, \frac{c}{6} + \frac{2d}{3}\right) = (a, b, c, d)$$

$$\iff \begin{cases} b = 2a \\ 3a + 3b + 2c = 6b \\ a + b + 3c + 2d = 6c \\ c + 4d = 6d \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2a \\ 3a + 2c = 3b = 6a \\ 3a + 2d = 3c \\ c = 2d \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2a \\ 2c = 3a \\ c = 2d \end{cases}$$

Comme $a + b + c + d = 1$ i.e. $a + 2a + \frac{3a}{2} + \frac{3a}{4} = 1$ i.e. $12a + 6a + 3a = 4$ ceci impose $a = \frac{4}{21}$ et donc $\mu = \left(\frac{4}{21}, \frac{8}{21}, \frac{4}{14}, \frac{2}{14}\right)$. On a donc

$$\forall e_0 \in E \quad \forall e \in E \qquad \lim_{n \to +\infty} P(X_n = e|X_0 = e_0) = \mu(e)$$

La formule de conditionnement par tous les cas possibles donne

$$\forall (x, y, z, t) \in (\mathbb{R}^+)^4 \qquad \lim_{n \to +\infty} (x, y, z, t)\pi^n = (x + y + z + t)\left(\frac{4}{21}, \frac{8}{21}, \frac{4}{14}, \frac{2}{14}\right)$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \pi^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & \frac{4}{14} & \frac{2}{14} \\ \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & \frac{4}{14} & \frac{2}{14} \\ \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & \frac{4}{14} & \frac{2}{14} \\ \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & \frac{4}{14} & \frac{2}{14} \end{pmatrix}$$

6) La chaine étant irréductible de probabilité stationnaire $\mu = \left(\frac{4}{21}, \frac{8}{21}, \frac{4}{14}, \frac{2}{14}\right)$, le théorème ergodique indique que

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{X_n=3} = \frac{n}{n+1} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{X_n=3} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} \int \mathbf{1}_{x=3} \, d\mu(x) = \frac{2}{14}$$

En moyenne sur une longue période, il y a deux animaux en attente pendant un septième du temps seulement. Il est inutile d'acheter un deuxième abreuvoir.

Université de Lille **Département de Mathématiques** **M.Fradon**
MASS L3 S5 **Probabilités Approfondies** **2018-2019**

Examen du 18 décembre 2018
durée : 2 heures
Sans documents. Tout matériel électronique interdit.

Ex 0. Donner la définition d'une chaine de Markov.

Ex 1. Sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ on note $\mathcal{F}$ la plus petite tribu qui contient $\{1\}$ et $\{2, 3\}$.

1) Expliciter $\mathcal{F}$ en donnant la liste de ses éléments.

2) On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. Les fonctions suivantes sont-elles $\mathcal{F}$-mesurables ? (justifier)

— la fonction f définie sur Ω par $f(1) = f(2) = f(3) = 0$ et $f(4) = f(5) = f(6) = 1$
— la fonction g définie sur Ω par $g(1) = g(3) = g(5) = 1$ et $g(2) = g(4) = g(6) = 2$

Ex 2. On rappelle que pour toute fonction borélienne positive f sur $\mathbb{R}$, l'intégrale de f par rapport à la mesure de comptage $\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \delta_k$ sur $\mathbb{N}^*$ est égale à la série : $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$.

1) Rappeler pour quels réels α la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.

2) En utilisant le théorème de convergence monotone (Beppo Levi), calculer la limite quand n tend vers l'infini de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-\frac{n+1}{n}}$

Ex 3. En utilisant le théorème de convergence dominée pour la mesure de Lebesgue, calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^2 \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^n} \, dx$$

Ex 4. On modélise le fonctionnement d'une machine. Pour simplifier, on considérera qu'on observe la machine à chaque heure et qu'elle a trois états possibles : 1 (bon état), 2 (mauvais état) et 3 (en panne). Le passage d'un état donné à l'état une heure après se fait de la façon suivante :

— quand la machine est en bon état, il y a 9 chances sur 10 qu'elle le reste, et 1 chance sur 10 qu'elle devienne en mauvais état ;
— quand elle est en mauvais état, il y a 3 chances sur 5 qu'elle le reste, 1 chance sur 5 pour qu'elle tombe en panne, et 1 chance sur 5 pour qu'un technicien s'en aperçoive et la répare. La réparation remet la machine en bon état.
— quand la machine tombe en panne, un technicien vient immédiatement la réparer. Une heure après, elle redémarre en bon état.

On note X_n l'état de la machine au bout de n heures.

1) Dessiner le graphe de la chaine de Markov représentant les états de la machine, et écrire

sa matrice de transition.

2) Ce matin, la machine a démarré en bon état. Quelle est la probabilité que trois heures après elle soit en bon état ?

3) La chaine est-elle irréductible ? Est-elle apériodique ?

4) A-t-elle une probabilité réversible ? Si oui, laquelle ? A-t-elle une probabilité invariante ? Si oui, laquelle ?

5) Quelle est la probabilité qu'à un moment quelconque, longtemps après la mise en service de la machine, elle soit en bon état ? (justifier)

6) En moyenne sur une longue période, quelle proportion du temps est perdue pour cause de panne ? (justifier)

Examen du 18 décembre 2018, corrigé

Ex 1.

1) La plus petite tribu sur $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ qui contient $\{1\}$ et $\{2,3\}$ est

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2,3\}, \{2,3,4,5,6\}, \{1,4,5,6\}, \{1,2,3\}, \{4,5,6\}\}$$

car cet ensemble est stable par passage au complémentaire et par union et intersection dénombrable.

2) La fonction f définie sur Ω par $f(1) = f(2) = f(3) = 0$ et $f(4) = f(5) = f(6) = 1$ est $\mathcal{F}$-mesurable. Cela peut se voir rapidement au fait que $f = \mathbf{1}\{4,5,6\}$ et $\{4,5,6\} \in \mathcal{F}$. On peut aussi le justifier pas à pas en vérifiant que tous les $f^{-1}(]-\infty;t])$ appartiennent à $\mathcal{F}$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f^{-1}(]-\infty;t]) = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F} \text{ si } t < 0 \\ \{1,2,3\} \in \mathcal{F} \text{ si } 0 \leq t < 1 \\ \Omega \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$$

La fonction g définie sur Ω par $g(1) = g(3) = g(5) = 1$ et $g(2) = g(4) = g(6) = 2$ n'est pas $\mathcal{F}$-mesurable car $\{1\} = [1;1]$ est un borélien de $\mathbb{R}$ et $g^{-1}(\{1\}) = \{1,3,5\} \notin \mathcal{F}$.

Ex 2.

1) On sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

2) Le résultat précédent assure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la série $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-\frac{n+1}{n}}$ converge.

u_n est l'intégrale par rapport à la mesure de comptage $\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k$ de la fonction f_n définie sur $\mathbb{N}$ par $f_n(k) = k^{-\frac{n+1}{n}} = e^{-(1+\frac{1}{n})\ln(k)}$. Les f_n sont positives sur $\mathbb{N}^*$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{n+1} \qquad \text{donc} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad e^{-(1+\frac{1}{n})\ln(k)} \leq e^{-(1+\frac{1}{n+1})\ln(k)}$$

donc la suite de fonctions $(f_n)_n$ est croissante. D'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-(1+\frac{1}{n})\ln(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} e^{-(1+\frac{1}{n})\ln(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\ln(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

Ex 3. La fonction $f_n \ : \ x \longmapsto \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} \ \mathbf{1}_{[0;2](x)}$ est continue par morceaux donc mesurable sur $\mathbb{R}$. Elle est Riemann-intégrable sur l'intervalle fermé borné $[0;2]$, donc son intégrale de Riemann y coïncide avec son intégrale de Lebesgue :

$$\int_0^2 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} \, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} \ \mathbf{1}_{[0;2]}(x) \ d\lambda(x)$$

Pour tout x de $]0;2]$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} (1+nx^2)\ e^{-n\ \ln(1+x^2)} = 0$
donc la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers $\mathbf{1}_{\{0\}}$.
D'après la formule du binôme, $(1+x^2)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{2k} \geq 1+nx^2$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0;2] \quad \left|\frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\right| \leq 1 \quad \text{donc} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |f_n| \leq \mathbf{1}_{[0;2]}$$

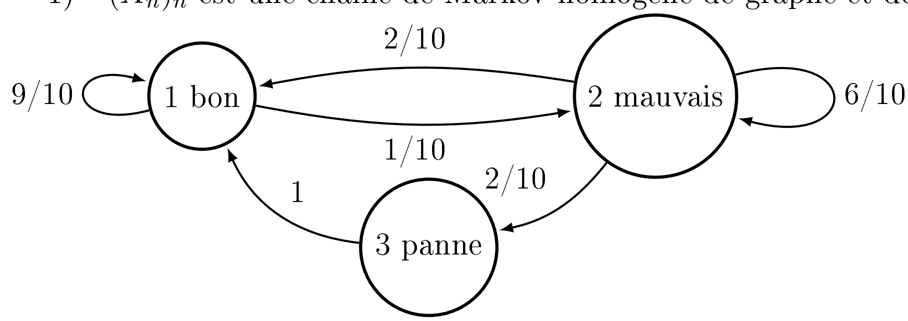
Comme $\mathbf{1}_{[0;2]}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue, le théorème de convergence dominée assure que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\, \mathbf{1}_{[0;2]}(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\, \mathbf{1}_{[0;2]}(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{0\}}\, d\lambda(x) = \lambda(\{0\}) = 0$$

En conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^2 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\, dx = 0$

Ex 4. Fiabilité d'une machine

1) $(X_n)_n$ est une chaine de Markov homogène de graphe et de matrice



$$\pi = \begin{pmatrix} 9/10 & 1/10 & 0 \\ 2/10 & 6/10 & 2/10 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) *Ce matin, la machine a démarré en bon état* signifie que la loi de X_0 est $\mu_0 = (1,0,0)$. Elle sera trois heures après dans l'état X_3 de loi μ_3.

$$\mu_1 = (1,0,0)\pi = (9/10, 1/10, 0) \qquad \mu_2 = (9/10, 1/10, 0)\pi = (83/100, 15/100, 2/100)$$

$$\mu_3 = (\frac{83}{100}, \frac{15}{100}, \frac{2}{100})\pi = (\frac{83\times 9 + 15\times 2 + 20}{1000}, \frac{83 + 15\times 6}{1000}, \frac{30}{1000}) = (\frac{797}{1000}, \frac{173}{1000}, \frac{30}{1000})$$

La probabilité que trois heures après la machine soit en bon état est de 797 chances sur 1000.

3) La chaine est irréductible (tout état est accessible à partir des autres) donc tous les états ont la même période, qui vaut 1 car $P(X_1 = 1 | X_0 = 1) > 0$ par exemple. La chaine est donc apériodique.

4) S'il existe une probabilité réversible $\mu = (a,b,c)$, elle doit satisfaire les conditions

$$a\frac{1}{10} = b\frac{2}{10} \qquad b\frac{2}{10} = c\times 0 \qquad a\times 0 = c\times 1$$

La seule solution est $\mu = (0,0,0)$ qui n'est pas une probabilité donc il n'existe pas de probabilité réversible.

S'il existe une probabilité invariante $\mu = (a,b,c)$, elle doit satisfaire les conditions

$$(a,b,c)\begin{pmatrix} 9/10 & 1/10 & 0 \\ 2/10 & 6/10 & 2/10 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (a,b,c) \qquad \Longleftrightarrow \; (9a+2b+10c, a+6b, 2b) = 10(a,b,c)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b = 5c \\ a+6b = 10b \\ 2b+10c = a \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \begin{cases} b = 5c \\ a = 20c \end{cases}$$

L'unique probabilité stationnaire est $(20/26, 5/26, 1/26)$. Elle est non réversible, évidemment.

5) La chaine étant irréductible et apériodique de probabilité stationnaire $(20/26, 5/26, 1/26)$, le théorème de convergence en loi assure que
pour tout état initial j on a $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 1 | X_0 = j) = 20/26$.
Le conditionnement par tous les cas possibles $P(X_n = 1) = \sum_{i=1}^{3} P(X_n = 1|X_0 = j)P(X_0 = j)$ entraine

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 1) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{3} \frac{20}{26} P(X_0 = j) = \frac{10}{13}$$

Au bout d'un temps long après sa mise en service, la probabilité que la machine soit en bon état est de $20/26$.

6) La chaine étant irréductible de probabilité stationnaire $\mu = (20/26, 5/26, 1/26)$, le théorème ergodique indique que

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{X_n=3} = \frac{n}{n+1}\,\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{X_n=3} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \int \mathbf{1}_{x=3}\; d\mu(x) = 1/26$$

En moyenne sur une longue période, la proportion du temps perdue pour cause de panne est de $1/26$.

Université de Lille	**Département de Mathématiques**	**M.Fradon**
MASS L3 S5	**Probabilités Approfondies**	**2018-2019**

Devoir surveillé du 5 novembre 2018

durée : 1 heure

Sans documents. Tout matériel électronique interdit.

Ex 0. Questions de cours

1) Donner la définition d'une chaine de Markov.

2) Que signifie l'affirmation : *la chaine est irréductible.*

Ex 1. Tribu et fonctions mesurables

Sur l'ensemble $\Omega = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ on note $\mathcal{F}$ la plus petite tribu qui contient $\{-2, -1, 0\}$ et $\{0, 1, 2\}$.

1) Expliciter $\mathcal{F}$ en donnant la liste de ses éléments.

2) On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. Parmi ces trois fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$, lesquelles sont $\mathcal{F}$-mesurables ? (justifier).

— la fonction nulle : $\forall \omega \in \Omega \quad f_0(\omega) = 0$

— la fonction identité : $\forall \omega \in \Omega \quad f_1(\omega) = \omega$

— la fonction signe : $f_2(-2) = -1, \quad f_2(-1) = -1, \quad f_2(0) = 0, \quad f_2(1) = 1, \quad f_2(2) = 1$

Ex 2. Convergence d'intégrales

En utilisant le théorème de convergence monotone pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln\left(\frac{2}{1+x^n}\right) dx$$

Ex 3. Convergence de séries

On rappelle (cf fiche 1 ex 21) que pour toute fonction borélienne positive f sur $\mathbb{R}$, l'intégrale de f par rapport à la mesure de comptage $\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k$ sur $\mathbb{N}$ est égale à la série : $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)$. En utilisant le théorème de convergence dominée, calculer la limite quand n tend vers l'infini de

$$u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2n+3k}{4n+5k}\right)^k$$

Devoir surveillé du 5 novembre 2018, corrigé

Ex 1. Tribu et fonctions mesurables

1) On utilise le fait qu'une tribu est stable par passage au complémentaire et par intersection dénombrable pour déterminer quels éléments autres que $\emptyset$, Ω , $\{-2,-1,0\}$ et $\{0,1,2\}$ appartiennent à $\mathcal{F}$, jusqu'à obtenir une famille de parties stable par passage au complémentaire et par union dénombrable.

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{-2,-1,0\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{-2,-1\}, \{0\}, \{-2,-1,1,2\}\}$$

2) Parmi les trois fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ de l'énoncé, seules la fonction nulle et la fonction signe sont $\mathcal{F}$-mesurables. Justifions-le :

— Pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, $f_0^{-1}(B) = \Omega$ si $0 \in B$ et $f_0^{-1}(B) = \emptyset$ si $0 \notin B$. Dans tous les cas, $f_0^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ donc f_0 est $\mathcal{F}$-mesurable.

— $\{1\} = [1;1]$ est un borélien de $\mathbb{R}$ et $f_1^{-1}(\{1\}) = \{1\} \notin \mathcal{F}$ donc f_1 n'est pas $\mathcal{F}$-mesurable.

— Pour la fonction signe, il est plus rapide d'utiliser le fait qu'il suffit de vérifier que tous les $f_2^{-1}(]-\infty;t])$ appartiennent à $\mathcal{F}$ pour prouver que f_2 est $\mathcal{F}$-mesurable.

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_2^{-1}(]-\infty;t]) = \begin{cases} \emptyset \text{ si } t < -1 \\ \{-2,-1\} \text{ si } -1 \le t < 0 \\ \{-2,-1,0\} \text{ si } 0 \le t < 1 \\ \Omega \text{ si } t \ge 1 \end{cases}$$

Ex 2. Convergence d'intégrales

La fonction $f_n : x \longmapsto \ln(2) - \ln(1+x^n)$ est continue sur $[0;1]$ donc intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle. L'intégrale de Riemann sur un intervalle fermé borné coïncide avec l'intégrale de lebesgue donc :

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{2}{1+x^n}\right) dx = \int_{[0;1]} \ln(2) - \ln(1+x^n)\ d\lambda(x)$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout x de $[0;1]$ on a $2 \ge 1 + x^n \ge 1 + x^{n+1}$ donc

$$0 \le \ln(2) - \ln(1+x^n) \le \ln(2) - \ln(1+x^{n+1})$$

Les f_n forment une suite croissante de fonctions positives sur $[0;1]$ (autrement dit, les fonctions d'expression $\ln(2) - \ln(1+x^n)$ sur $[0;1]$ et nulles en dehors de $[0;1]$ forment une suite croissante de fonctions positives sur $\mathbb{R}$, toutes boréliennes puisque continues par morceaux). La limite simple de cette suite est $\ln(2)\mathbf{1}_{[0;1[}$.

En utilisant le théorème de convergence monotone

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \ln\left(\frac{2}{1+x^n}\right)dx &= \lim_{n\to+\infty}\int_{[0;1]} \ln(2)-\ln(1+x^n)\ d\lambda(x)\\ &= \int_{[0;1]}\lim_{n\to+\infty}\left(\ln(2)-\ln(1+x^n)\right)d\lambda(x)\\ &= \int_{[0;1]}\ln(2)\mathbf{1}_{[0;1[}\ d\lambda(x) = \ln(2)\lambda([0;1[) = \ln(2)\end{aligned}$$

Ex 3. Convergence de séries

Pour toute fonction borélienne positive f sur $\mathbb{R}$, l'intégrale de f par rapport à la mesure de comptage $\mu = \sum_{k=0}^{+\infty}\delta_k$ sur $\mathbb{N}$ est égale à la série : $\int_{\mathbb{R}} f\ d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)$. Donc en notant f_n la fonction sur $\mathbb{R}$ qui vaut $\left(\frac{2n+3k}{4n+5k}\right)^k$ en chaque entier k, on a

$$u_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2n+3k}{4n+5k}\right)^k = \int_{\mathbb{R}} f_n\ d\mu$$

Remarquons qu'il n'est pas utile de spécifier les valeurs que prend f_n en dehors de $\mathbb{N}$ puisque $\mu(\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}) = 0$: changer une fonction sur un négligeable de la mesure ne change pas la valeur de son intégrale par rapport à cette mesure. On peut décider que les f_n sont nulles en dehors de $\mathbb{N}$, par exemple.

Pour tout entier k, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+3k}{4n+5k}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ donc la suite des fonctions f_n converge simplement sur $\mathbb{N}$. Elle est dominée sur $\mathbb{N}$ par une fonction qui ne dépend pas de n et qui est intégrable car $\frac{2n+3k}{4n+5k} \leq \frac{2}{3} \iff 6n+9k \leq 8n+10k \iff 0 \leq 2n+k$ donc

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad \left|\left(\frac{2n+3k}{4n+5k}\right)^k\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad\text{et}\quad \int_{\mathbb{N}}\left(\frac{2}{3}\right)^k\ d\mu(k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k < +\infty$$

En utilisant le théorème de convergence dominée, on peut échanger la limite et l'intégrale

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2n+3k}{4n+5k}\right)^k = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n\ d\mu = \int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to+\infty} f_n\ d\mu = \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2}\right)^k\ d\mu(k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$$