Université Lille 1 **U.F.R. de Mathématiques** **M.Fradon**

Collège Carnot **S.Daniel, F.Laithier, C.Séraphin** **2016-2017**

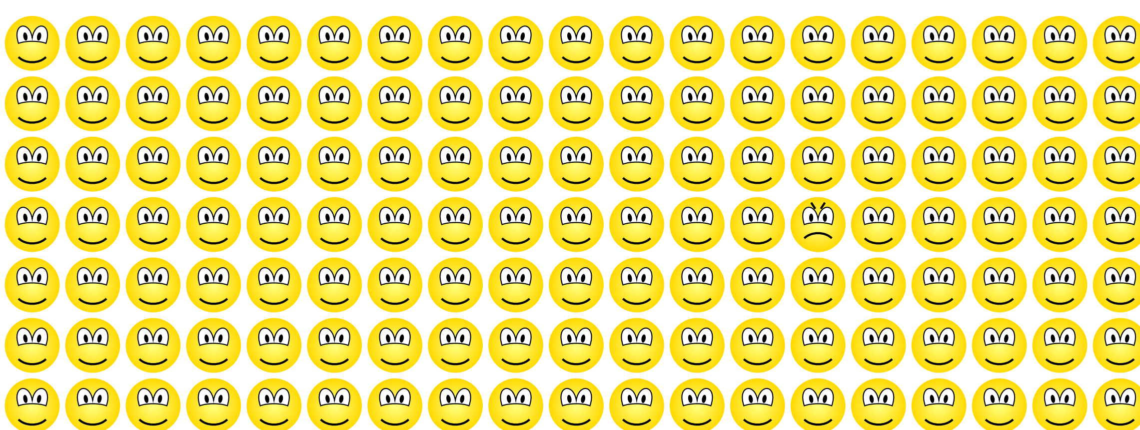
Maths en Jean
Smileys tassés et pokémons bien serrés

Question 2 :
Comment mettre un maximum de smileys dans un minimum de place ?
Les smileys sont des petits êtres plats et circulaires, tous de même diamètre. Peut-on (sans les superposer !) leur faire couvrir 80% de la surface d'une feuille de papier ? Peuvent-ils en couvrir 90% ? 95% ? Dans quelle configuration recouvrent-ils le plus de surface ? Et combien un smiley peut-il en toucher d'autres ?

Question 3 :
Pokémons : attrapez-les tous, d'accord, mais après ? Commment stocker un grand nombre de pokéballs sans place perdue ?
Les pokéballs sont sphériques Si on les entasse dans une grande pièce, elles ne peuvent pas occuper 100% de son volume. Peuvent-elles en occuper au moins 50% ? Au moins 80% ? Ou plus ? Quelle est la configuration dans laquelle elles sont le plus serrées ? Y a-t-il plusieurs configurations serrées ? Une sphère peut être en contact avec combien d'autres sphères de même diamètre ?

Quelle serait la question 1 ?
Et quelle serait sa réponse ?

Si ces questions vous en inspirent d'autres, foncez ! Il y a quantité de problèmes intéressants à base de sphères.



Université Lille 1 **U.F.R. de Mathématiques** **M.Fradon**

Collège Carnot **S.Daniel, F.Laithier, C.Séraphin** **2016-2017**

Maths en Jean
Empilement de sphères dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Spoiler alert : Ceci est pour vous trois seulement. Ca contient les "solutions", donc ne pas montrer aux élèves sous peine de leur gâcher le plaisir.

D'ailleurs je ne sais pas rédiger à leur niveau. J'ai mis un peu de tout, à vous de voir ce qui est exploitable avec des quatrièmes. J'ai écrit en annexe la preuve de Pythagore et du calcul de volume de la sphère, en version que j'espère explicable aux élèves. C'est un parachute au cas où un élève refuserait de gober la formule. A mon sens, refuser toute affirmation non justifiée est un droit (devoir ?) fondamental du matheux [1].

Accessoirement, je comprendrais très bien que vous reportiez la lecture de ce qui suit, pour ne pas vous gâcher le plaisir à vous aussi. Faites comme vous voulez ;-)

1. Empilement maximal de sphères : généralités

La boule (fermée) de centre x et de rayon r est l'ensemble des points à distance inférieure ou égale à r de x. Ca dépend évidemment de la distance choisie. Il serait rigolo de faire découvrir aux élèves la distance L^1 avec ses disques carrés et la non-unicité des géodésiques. Mais ne nous dispersons pas. On se limite à la distance L^2 (i.e. euclidienne) dans ce document. Les boules sont rondes. En dimension 2 ce sont des disques. En dimension 3 elles sont sphériques.

En dimension 1 la boule de centre x et de rayon r est l'intervalle $[x-r\ ;\ x+r]$. La question de l'empilement maximal des boules de rayon r dans tout l'espace $\mathbb{R}$ est donc triviale. Il suffit de constater que

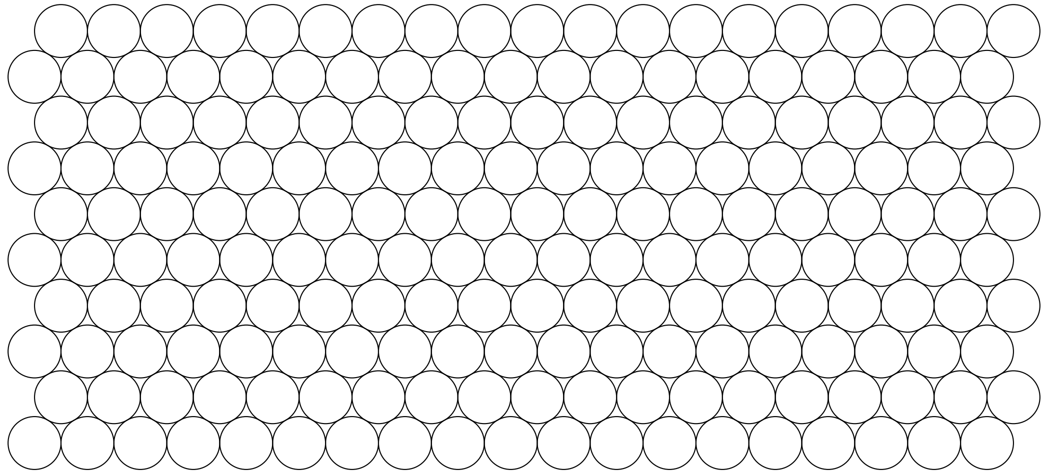
$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [2nr - r\ ;\ 2nr + r]$$

La fraction d'espace occupée est de 100%.

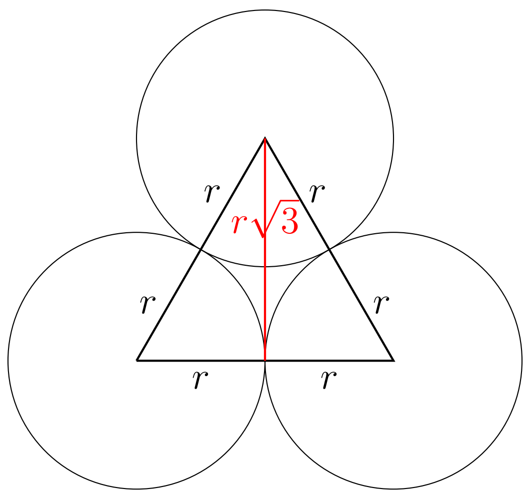
C'est la question 1, qui ne mérite pas vraiment d'être posée sauf pour s'amuser. C'est à partir de $d = 2$ que ça devient sportif.

1. Même s'il est très jeune et que ça complique la vie de ses profs. Et même s'il est vieux et que ça complique la vie de son président d'université.

2. Empilement maximal de sphères en dimension 2 : les disques



L'emplilement le plus serré pour les disques est le réseau hexagonal. Un petit coup de Pythagore donne l'espacement entre les rangées :



On peut lire sur ce dessin que la surface occupée par les disques est $\frac{\pi}{2}r^2$ dans chaque triangle équilatéral du réseau, soit une fraction de surface occupée

$$\frac{\pi/2\ r^2}{r\sqrt{3}\times r} = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \simeq 0,9069 \simeq 90,69\%$$

Les smileys peuvent occuper plus de 90% de la surface, mais de justesse !

On constate au passage que la fraction de surface occupée ne dépend pas du rayon (invariance par homothétie).

Chaque disque touche au maximum six autres disques.

On peut aussi mettre nm disques de rayon r dans un rectangle de largeur $2nr + r$ et de longueur $(m-1)r\sqrt{3} + 2r$. On constate que pour un très grand rectangle (très grand par rapport au rayon des disques) la fraction de surface occupée est $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$

$$\lim_{n,m\to+\infty} \frac{\text{aire des disques}}{\text{aire du rectangle}} = \lim_{n,m\to+\infty} \frac{\pi r^2 nm}{(2nr+r)((m-1)r\sqrt{3}+2r)}$$

$$= \pi \lim_{n,m\to+\infty} \frac{nm}{(2n+1)((m-1)\sqrt{3}+2)} = \pi\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{12}}$$

3. Empilement maximal de sphères en dimension 3 : les boules

L'empilement maximal en dimension 3 est obtenu en superposant des couches de sphères disposées selon le réseau hexagonal. Chaque sphère de la couche $n+1$ se trouve au-dessus du barycentre d'un triangle équilatéral de sphères de la couche n. L'espacement entre les étages est donc la hauteur du tétraèdre régulier d'arêtes $2r$. La distance entre le centre d'une sphère de l'étage n et le barycentre du triangle à l'étage en-dessous est $\frac{2}{3}r\sqrt{3}$. Pythagore donne que la hauteur entre deux étages est $\sqrt{(2r)^2 - \left(\frac{2}{3}r\sqrt{3}\right)^2} = r\sqrt{4-\frac{4}{3}} = r\sqrt{\frac{8}{3}}$.

On peut donc mettre nmk sphères de rayon r dans une grande boite de largeur $2nr+r$, de longueur $(m-1)r\sqrt{3}+2r$ et de hauteur $(k-1)r\sqrt{\frac{8}{3}}+2r$. La densité (fraction d'espace occupé par les sphères) est

$$\lim_{n,m,k\to+\infty} \frac{\text{volume des sphères}}{\text{volume de la boite}} = \lim_{n,m,k\to+\infty} \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \ n \ m \ k}{(2nr+r)\ ((m-1)r\sqrt{3}+2r)\ ((k-1)r\sqrt{\frac{8}{3}}+2r)}$$

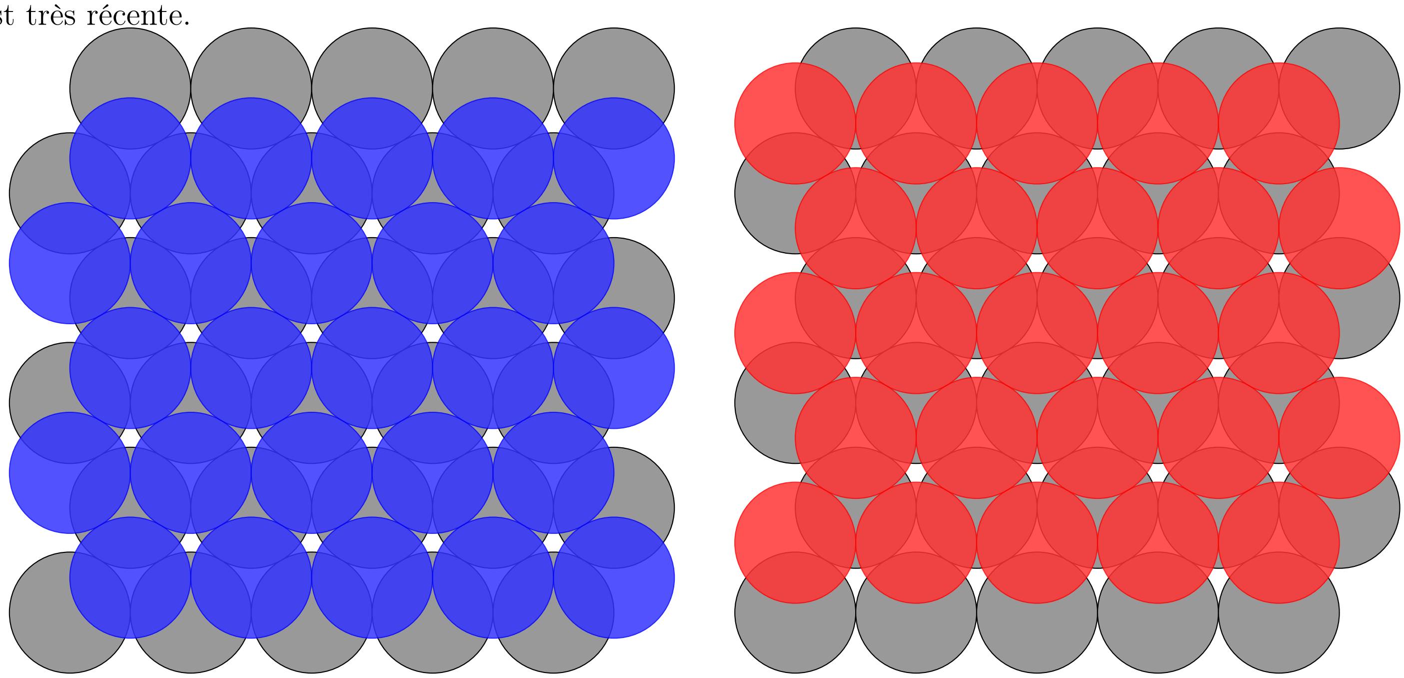
Sans surprise, on constate que r s'élimine, puisque tout est invariant par changement d'échelle.

$$= \pi \lim_{n,m,k\to+\infty} \frac{\frac{4}{3}\ n\ m\ k}{(2n+1)\ ((m-1)\sqrt{3}+2)\ ((k-1)\sqrt{\frac{8}{3}}+2)} = \pi \lim_{n,m,k\to+\infty} \frac{\frac{4}{3}\ n\ m\ k}{2n\ m\sqrt{3}\ k\sqrt{\frac{8}{3}}} = \pi\frac{\frac{4}{3}}{2\sqrt{8}}$$

On obtient dans une très grande boite une densité de sphères égale à

$$= \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{18}} \simeq 0,7405$$

Les sphères occupent donc $74,05\%$ de l'espace, même pas les trois quarts du volume disponible. C'est la densité maximale dans $\mathbb{R}^3$. La preuve que c'est bien le maximum parmi toutes les configurations périodiques de sphères a 150 ans, mais la preuve qu'aucune configuration non-périodique ne peut dépasser cette densité est très récente.



Sur une couche de sphères donnée (ici en noir) on a deux possibilités pour poser la couche au-dessus : la bleue et la rouge sur ce dessin. Pour la couche suivante on a de nouveau deux possibilités, et ainsi de suite. Et tous ces choix réalisent la densité maximale.

Les empilements noir-bleu-noir-bleu-etc et noir-rouge-noir-rouge-etc sont les mêmes à translation près (empilement hexagonal compact). Les empilement noir-bleu-rouge-noir-bleu-rouge-etc ou noir-rouge-bleu-noir-rouge-bleu-etc sont aussi les mêmes à translation près (empilement cubique faces centrées). Les autres empilements, par exemple noir-rouge-noir-bleu-rouge-bleu-etc, sont maximaux aussi. Il y a donc une infinité de configurations d'empilement maximal de sphères dans $\mathbb{R}^3$. Et la plupart ne sont pas périodiques, ce qui étonne un peu au début. Ceci mérite d'être expérimenté avec de vraies balles parce que sur les dessins, honnètement, on n'y voit rien.

Chaque sphère est en contact avec 12 autres sphères. C'est le maximum possible (kissing number). Il reste de la place, au sens où on peut mettre 12 sphères au contact d'une treizième de façon qu'elles aient la place de rouler dessus. Mais il n'y a pas assez de place pour en mettre une de plus. C'est le sujet d'une célèbre dispute entre Newton et un de ses fans. Voir https ://plus.maths.org/content/newton-and-kissing-problem si certains veulent les détails.

4. Recouvrement minimal et autres applications du problème

Empiler un maximum de sphères dans une zone donnée est un problème directement lié à celui de recouvrir une surface donnée par des disques, ou un volume donné par des sphères, en utilisant le moins possible de disques ou de sphères. Si un remplissage par empilement est maximal au sens où on ne peut pas rajouter une sphère sans chevauchement et sans déplacer les autres sphères, alors la même disposition des centres donne une configuration qui recouvre tout : il suffit de doubler le rayon.

Comme pour l'empilement, la question du recouvrement est ouverte : on ne sais pas combien de disques de rayon 1 il faut au minimum pour recouvrir un rectangle de largeur et longueur donnée, par exemple. On ne sait pas combien de boules de rayon 1 logent dans un cylindre de taille donnée (problème de la boite de petits pois) ou une sphère de rayon donné. Combien peut-on mettre de bidons dans un container (empilement de cylindres dans un pavé) ? Combien de boites de longueur-largeur-hauteur connues dans un camion (empilement de pavés dans un pavé ? Les applications en logistiques sont immenses. . .

Quelle est la taille minimale du trou qu'il faut percer pour y passer n tuyaux ou cables de diamètre donné ? C'est facile si $n = 19$ et si le trou est rond. Mais dans le cas où $n = 20$? Ou si la trappe est rectangulaire ? Ces problèmes d'empilement fourmillent de questions ouvertes. Au passage, si ça amuse les élèves, on peut leur demander quels sont les nombres pour lesquels le problème du trou plus ou moins rond est facile ($n = 7$, $n = 19$, $n = 37$, et ensuite ? Et est-ce vraiment un trou rond qu'il faut percer ?).

On ne sait à peu près rien dans ces problèmes d'empilement, à part pour l'espace tout entier et en dimensions 2 et 3. L'empilement maximal dans $\mathbb{R}^2$ est bien l'empilement hexagonal (résultat de Tóth en 1940). L'empilement hexagonal compact ou cubique faces centrées (ou un mélange des deux) est maximal dans $\mathbb{R}^3$ (conjecture de Képler vers 1611, preuve partielle par Gauss avant 1850, améliorée par Tóth en 1953, et achevée par Hales en 2015). C'est dire la difficulté du problème !

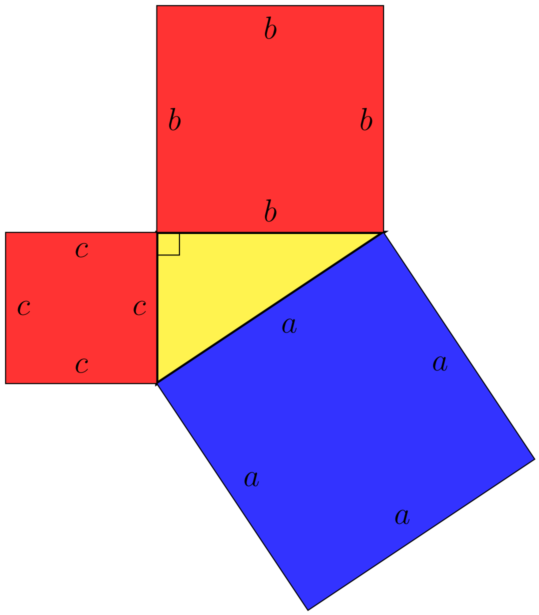
Grâce à ce résultat (il servait avant d'être démontré), on a une idée approximative du lien entre le volume d'un contenant plus ou moins parallélipipèdique et le nombres de sphères de petit rayon qu'il peut contenir. Ca sert entre autres pour évaluer le volume des coffres de voitures par remplissage avec des balles en plastique. Mais c'est empirique. Du coup, certains constructeurs remplissent avec des cubes ! Mais on n'a pas davantage de formule sur le nombre de cubes que contient un coffre de volume donné, sauf dans le cas évident où il a exactement la forme d'un pavé de dimensions multiples du coté du cube.

L'imprécision dans le litrage des coffres n'empêche pas la voiture de rouler. Pour les problèmes où une solution relativement précise est vraiment nécessaire, comme le recouvrement d'une surface donnée par des disques (problème de couverture GSM) ou le recouvrement d'une grande sphère par des petites sphères en dimension très grande ($d >> 1000$ pour l'encodage de la voix humaine) on se débrouille avec des solutions approchées obtenues par simulations informatiques. C'est un peu du bricolage au sens où ça n'est pas optimal, mais ça suffit pour faire fonctionner les téléphones portables par exemple.

5. Annexe 1 : Pythagore

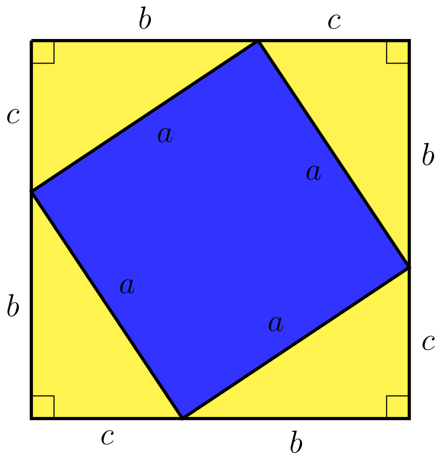
Je ne sais rien faire sans Pythagore. Et puis la preuve n'est pas compliquée.

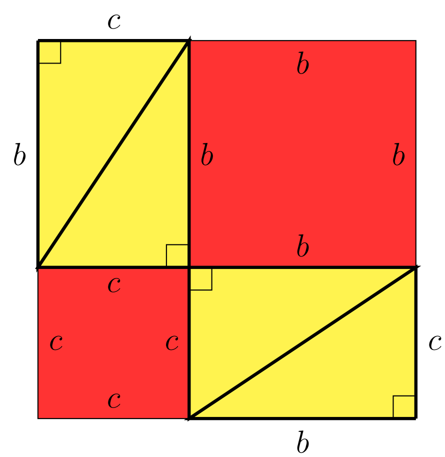
Théorème 5.1. Pour tous les triangles rectangles dans le plan, le carré du grand coté est égal à la somme des carrés des autres cotés.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Démonstration. Il faut prouver que la surface en bleu est la même que la surface en rouge. Il suffit de constater que chacune donne le carré de côté $b + c$ quand on lui ajoute 4 fois le triangle.



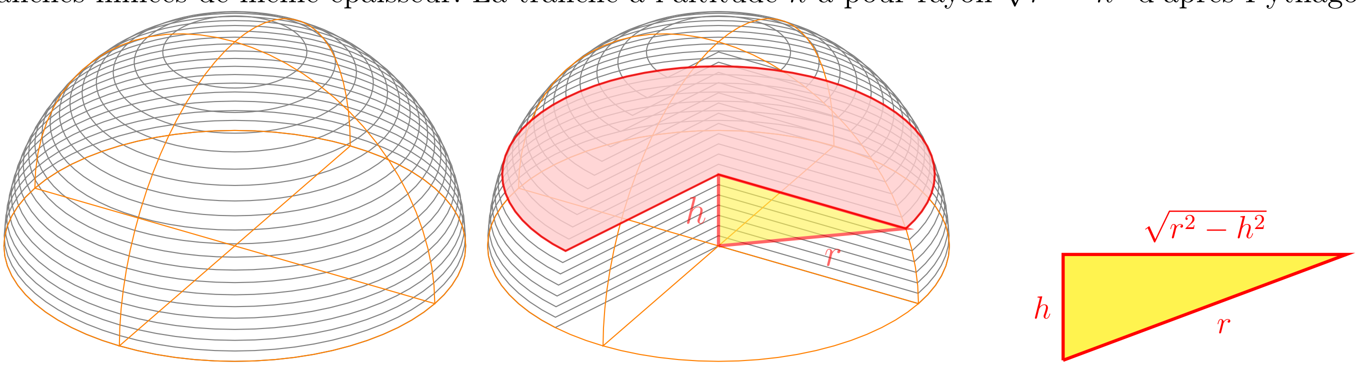


□

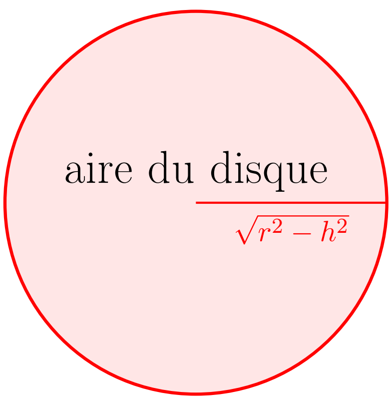
6. Annexe 2 : Volume de la sphère

J'ai cherché un éventuel calcul du volume de la sphère par découpage, mais Clément Séraphin a raison : pas moyen sans intégrale triple. Seulement, vous faites bien faire aux élèves une intégrale double avec le calcul de πr^2 par la méthode des parts de tarte. Donc l'intégrale triple peut peut-être passer, quitte à la construire en carton. On peut aussi vérifier la formule expérimentalement, en plongeant des billes dans du liquide. Mais ça demande beaucoup d'expériences avec des diamètres différents et $\frac{4}{3}\pi$ est difficile à distinguer de 4.

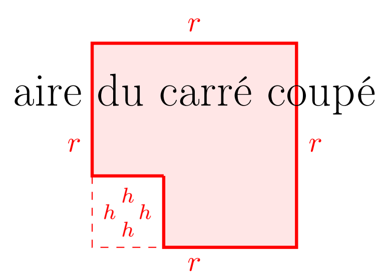
On prend une sphère de rayon r. On va calculer le volume de la moitié. On découpe la demi-sphère en tranches minces de même épaisseur. La tranche à l'altitude h a pour rayon $\sqrt{r^2 - h^2}$ d'après Pythagore.



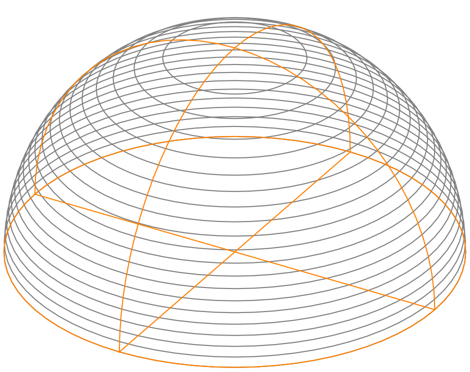
La tranche à l'altitude h est d'aire $\pi(r^2 - h^2)$, c'est-à-dire :



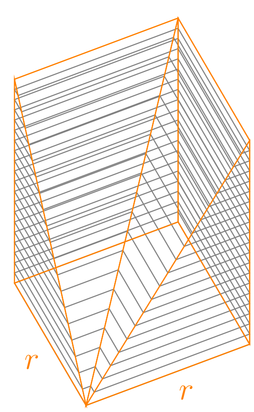
$$= \pi \times (r^2 - h^2) = \pi \times$$



On empile les tranches de "carrés coupés" dans l'ordre, celle d'aire $r^2 - h^2$ se mettant à l'altitude h. Ca forme un "cube moins pyramide". Je ne justifie pas le fait que ce "cube moins pyramide" est lui-même formé de deux pyramides, donc que son volume est deux tiers de celui du cube. Gabrielle m'a dit que Frédéric Laithier a trois pyramides qui s'emboitent pour former un cube : cet objet justifiera le $\frac{2}{3}r^3$ mieux qu'un blabla.

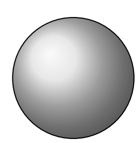


$$= \pi \times$$



$$= \pi \times \frac{2}{3} r^3$$

On multiplie par deux pour avoir le volume de la sphère entière :



$$= \frac{4}{3} \pi r^3$$