Potential Analysis **6:** 369–414, 1997.

Diffusions réfléchies réversibles dégénérées

MYRIAM FRADON
Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Bât. 425, Équipe de Modélisation Stochastique et Statistique, F-91405 Orsay Cedex, France
(e-mail: myriam.fradon@univ-lille1.fr)

Résumé. Dans un domaine D de $\mathbb{R}^d$, pour une densité de probabilité φ assez régulière et une matrice de diffusion σ *autorisée à dégénérer*, nous construisons la loi Q^s d'un processus $\varphi(x)\,\mathrm{d}x$-réversible, réfléchi dans D et de matrice σ. Cette construction est faite en utilisant la forme de Dirichlet associée, et une suite de processus approximants inspirée de Pardoux et R. Williams [23]. Sous des hypothèses de type 'contenu de Minkowski fini' sur le bord de D, nous montrons que Q^s est la loi d'une semi-martingale dont nous donnons une décomposition. L'identification avec une décomposition en fonctionnelles additives permet de conclure que la réflexion a lieu dans la direction 'conormale' $\sigma^*\sigma\boldsymbol{n}$, où $\boldsymbol{n}$ est la 'normale' construite par Chen [10] comme étant la direction de réflexion du brownien dans la compactification de Kuramochi.

Mots clés: Processus réfléchi, matrice de diffusion dégénérée, formes de Dirichlet, temps local.

Abstract. On a domain D in $\mathbb{R}^d$, for a smooth enough probability density φ and a diffusion matrix σ *which can degenerate*, we construct the law Q^s of a $\varphi(x)\,\mathrm{d}x$-symmetric reflecting process in D with matrix σ. Therefore, we use the associated Dirichlet form and a sequence of approximating processes already used by Pardoux and R. Williams in [23]. Under mild conditions on the boundary of D (finite Minkowski content), we prove that Q^s is the law of a semi-martingale and provide its decomposition. Comparing with the decomposition in additive functionals, we conclude that the process is reflected in the 'conormal' direction $\sigma^*\sigma\boldsymbol{n}$, where $\boldsymbol{n}$ denotes Chen's 'normal' (cf [10]), that is, the reflection direction of the Brownian motion in Kuramochi compactification.

Mathematics Subject Classifications (1991). 60J50, 31C25, 60J60, 60J55, 60J45.

Key words: Reflecting processes, degenerating diffusion matrix, Dirichlet form, local time.

1. Introduction

Quand on se donne un ouvert connexe D de $\mathbb{R}^d$, une probabilité μ sur D et une matrice de diffusion $\sigma(x)$ en tout point x de D, un problème intéressant consiste à chercher à construire un processus réfléchi μ-réversible de matrice σ dans $\bar{D}$. La réversibilité impose au processus une direction de réflexion qui peut ne pas être la normale au bord de D.

Dans le cas où $\sigma \equiv \mathrm{Id}$ et où $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}x = C^{\text{ste}}$, ce processus s'appelle le brownien réfléchi dans $\bar{D}$. Si D est un ouvert à bord lisse, on dispose de constructions probabilistes classiques (cf [17] pour le cas où D est une demi-droite ou un demi-espace, [27] pour le cas où D est à bord $\mathcal{C}^2$) et il est fortement markovien. Si D est quelconque (de mesure de Lebesgue finie), Fukushima a montré qu'on peut encore trouver une compactification $\tilde{D}$ de D dans laquelle le brownien réfléchi réversible est fortement markovien (cf [13], voir également [25]). Le bord de $\tilde{D}$ s'identifie à la frontière de Kuramochi. Si D est Lipschitz, ce n'est autre que la frontière euclidienne (cf Bass and Hsu [3, 4]) et le brownien réfléchi dans $\bar{D}$ admet alors la décomposition

$$X_t = X_0 + B_t + \int_0^t \boldsymbol{n}(X_s)\,\mathrm{d}L_s,$$

où B est un brownien d-dimensionnel et où $\boldsymbol{n}$ est la normale intérieure au bord de D. L est un processus croissant qui ne croît que quand X est sur le bord ∂D de D: $\mathrm{d}L_t = \mathbb{1}_{X_t \in \partial D}\,\mathrm{d}L_t$.

Quand la matrice de diffusion σ est non triviale (mais reste lipschitzienne), Tanaka a construit un processus réfléchi de matrice σ dans $\bar{D}$, dans le cas où D est un ouvert convexe et où la réflexion au bord se fait dans la direction de la normale (cf [28]). Lions et Sznitman ont étendu ensuite ce résultat au cas où la direction de réflexion peut être oblique et où D est seulement 'admissible' (par exemple, D à bord lisse par morceaux avec des angles convexes; voir [20] pour une définition plus précise de l'admissibilité).

Lorsqu'on veut que le processus réfléchi obtenu soit réversible, un outil privilégié de construction est la forme de Dirichlet associée (cf Fukushima [14]). R. Williams et Zheng ont utilisé la forme de Dirichlet

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{H}) = H^1(D) \\ \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{H}) \quad \mathcal{H}(f,f) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_D |\nabla f|^2\,\mathrm{d}x, \end{cases}$$

pour construire le brownien réfléchi réversible comme limite d'une suite faiblement convergente de diffusions dans $\bar{D}$ (cf [29]). Sous de faibles hypothèses de régularité du bord de D (condition de Minkowski), ce brownien réfléchi dans $\bar{D}$ est une semi-martingale (une CNS sur D pour que ce soit une quasi-martingale est donnée dans [11]). Mais ce n'est pas, dans le cas général, un processus fortement markovien. Ce type de construction a ensuite été étendue par Pardoux et R. Williams [23] au cas d'un processus réfléchi faiblement markovien μ-réversible de matrice de diffusion σ (avec σ et $p = \mathrm{d}\mu/\mathrm{d}x$ assez régulières et σ localement uniformément elliptique).

Par ailleurs, pour D vérifiant une hypothèse plus faible que celle de 'contenu de Minkowski', Chen a construit un brownien réfléchi réversible fortement markovien dans une compactification $\tilde{D}$ de D qui, comme celle de Kuramochi, rend $(\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{H}))$ régulière. Ce brownien réfléchi réversible admet la décomposition en semi-martingale suivante

$$X_t = X_0 + B_t + \int_0^t \boldsymbol{n}(X_s)\,\mathrm{d}L_s,$$

où $\boldsymbol{n}$ est un vecteur unitaire défini en presque tout point du bord de $\tilde{D}$. Par analogie avec le cas où D est Lipschitz, on dit encore que $\boldsymbol{n}$ est une 'normale intérieure'.

Si σ est uniformément elliptique et $p = \mathrm{d}\mu/\mathrm{d}x$ encadrée par deux constantes strictement positives, on déduit de la décomposition du brownien réfléchi dans $\tilde{D}$ celle d'une diffusion réfléchie μ réversible de matrice σ dans $\tilde{D}$

$$X_t \;=\; X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\,\mathrm{d}B_s + \int_0^t \frac{\nabla.(\sigma^*\sigma p)}{2p}(X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t (\sigma^*\sigma\,\boldsymbol{n})(X_s)p(X_s)\,\mathrm{d}L_s.$$

La réflexion a lieu ici dans la direction 'conormale' $\sigma^*\sigma\boldsymbol{n}$, où $\boldsymbol{n}$ est la 'normale' construite par le brownien.

Nous étudions ici le cas où σ *n'est pas supposé elliptique*. A partir de la forme

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{E}^s) = \{f \in L^2(D,\mu)/\sigma\nabla f \in L^2(D,\mu)\}, \\ \forall f,g \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s) \quad \mathcal{E}^s(f,g) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_D \sigma\nabla f.\sigma\nabla g\,\mathrm{d}\mu, \end{cases}$$

dont on montre que c'est une forme de Dirichlet, on construit la loi Q^s d'un processus réfléchi μ-réversible dans $\bar{D}$, dont le semi-groupe de transition est le semi-groupe de Markov associé à $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$. Par un raisonnement analogue à celui de [23], on montre que Q^s est la loi d'une semi-martingale. Pour pouvoir étudier le terme de réflexion en utilisant la normale $\boldsymbol{n}$ de Chen, on se place ensuite sur la compactification $\tilde{D}$, en supposant $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ régulière sur $\tilde{D}$. Le processus associé se décompose alors en fonctionnelles additives (cf [14]) et par identification avec la décomposition en semi-martingale, on montre que la réflexion a bien lieu dans la direction conormale et on obtient l'expression de la mesure de Revuz.

Cet article est organisé de la façon suivante.

La partie 2 introduit l'espace $H(D,\mu,a\mu) = \{f \in L^2(D,\mu)/\sigma\nabla f \in L^2(D,\mu)\}$ qui sera le domaine de la forme $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$, rappelle les liens qui existent entre formes de Dirichlet, semi-groupes de Markov et processus, et présente la forme de Dirichlet $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$. Dans la partie 3, on construit une suite d'approximations de la forme $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ par des formes de Dirichlet régulières $(\mathcal{E}^n,\mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$. On étudie les lois Q^n des diffusions associées aux $(\mathcal{E}^n,\mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ et on en donne une décomposition en semi-martingale. La partie 4 est consacrée à l'étude de la suite $(Q^n)_n$ dont on montre qu'elle converge faiblement vers la loi de processus Q^s associée à $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$. On démontre dans la partie suivante que Q^s est la loi d'une semi-martingale, à condition que D vérifie une hypothèse du type 'contenu de Minkowski'. Dans la partie 6, après avoir présenté la normale $\boldsymbol{n}$ et la mesure régulière α construites par Chen sur le bord d'une compactification $\tilde{D}$ de D, on décompose le processus associé à $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ en fonctionnelles additives. En identifiant avec la décomposition en semi-martingale déjà obtenue à la partie 5, on isole le terme de réflexion, dont on montre qu'il est associé à la mesure régulière sur le bord $\frac{1}{2}\sigma^*\sigma\,\boldsymbol{n}\,p\,\mathrm{d}\alpha$. Ceci est fait sous l'hypothèse que $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est régulière sur la compactification $\tilde{D}$. Les cas où nous savons montrer que cette hypothèse est vérifiée sont énumérés dans la partie 7. Mais la question de savior si cette hypothèse est vérifiée dans le cas général reste un problème ouvert.

2. La forme de Dirichlet

2.1. LES ESPACES FONCTIONNELS

Dans toute la suite,on travaillera dans $\mathbb{R}^d$, avec $d \geqslant 1$. Si D est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, on note $\mathcal{C}(D)$ l'ensemble des fonctions continues sur $D, \mathcal{C}_b(D)$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur D, et $\mathcal{C}_c(D)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans D. $\mathcal{C}^n(D)$ est l'espace des fonctions n fois continûment différentiables sur $D, \mathcal{C}_b^n(D)$ celui des fonctions de $\mathcal{C}^n(D)$ bornées ainsi que leurs n premières dérivées et $\mathcal{C}_c^n(D)$ celui des fonctions de $\mathcal{C}^n(D)$ à support compact dans D. Lorsque f sera une fonction à valeurs vectorielles ou matricielles, on dira que f est $\mathcal{C}^n(D)$ (resp. $\mathcal{C}_b^n(D), \mathcal{C}_c^n(D)$, etc) si tous ses coefficients le sont. Si $f \in \mathcal{C}^1(D)$, on note $\nabla f = (\partial_i f)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ son gradient et $\nabla.f = \sum_{i=1}^d \partial_i f$ sa divergence. Si a est une fonction $\mathcal{C}^1$ de D à valeurs dans l'espace des matrices $d \times d, \nabla.a$ désignera le vecteur $(\sum_{i=1}^d \partial_i a_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant d}$.

Pour toute la suite, on fixe D, domaine (i.e. ouvert connexe) de $\mathbb{R}^d$. On se donne une application $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathcal{S}_d$ où $\mathcal{S}_d$ désigne l'ensemble des matrices $d \times d$ et on note $a = \sigma^* \sigma$. On se donne également $p \colon D \to \mathbb{R}$ telle que $p > 0$ sur D et $\int_D p \, \mathrm{d}x = 1$. La probabilité μ sur D est définie par $\mathrm{d}\mu(x) = p(x) \, \mathrm{d}x$ On met sur σ et p les hypothèses suivantes

$$\begin{aligned}
&\sigma \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^d) \\
&p \in \mathcal{C}_b^1(D) \\
&\text{et } \int_D \frac{\nabla p}{p} . a \frac{\nabla p}{p} p \, \mathrm{d}x < +\infty \text{ (condition d'énergie finie)}
\end{aligned} \tag{HSP}$$

Comme d'habitude, on note $L^2(D, \mu)$ l'espace des fonctions (plus exactement des classes de fonctions pour l'égalité $\mu - p.p.$) de carré intégrable par rapport à μ. $L^2(D, \mu)$ est un espace de Hilbert et on l'identifie avec son dual.

Comme p est continue bornée strictement positive sur D, si on note $\mathrm{d}x$ la mesure de Lebesgue, on remarque que sur tout compact K de D, p vérifie $0 < \min_K p \leqslant p \leqslant \max_K p < +\infty$ et donc les normes $\| \, \|_{L^2(K, \mathrm{d}x)}$ et $\| \, \|_{L^2(K, \mu)}$ sont équivalentes et les espaces $L^2(K, \mathrm{d}x)$ et $L^2(K, \mu)$ égaux. En particulier, toute fonction de $L^2(D, \mu)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur tout compact de D.

DÉFINITION 2.1. *Si $f \in L^2(D, \mu)$, on dit que $\sigma \nabla f \in L^2(D, \mu)$ 'au sens des distributions sur D' si il existe $g \in L^2(D, \mu)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(D) \quad \int_D \varphi(x) g(x) \, \mathrm{d}x = - \int_D \nabla.(\varphi \sigma^*)(x) f(x) \, \mathrm{d}x, \tag{IPP}$$

et dans ce cas on dit que $g = \sigma\nabla f$ 'au sens des distributions sur D'.

Dans la suite, 'au sens des distributions sur D' sera sous-entendu chaque fois qu'on utilisera la notation $\sigma\nabla$.

REMARQUE 2.2. Si $\sigma\nabla f$ existe, elle est forcément unique (en tant qu'élément de $L^2(D,\mu)$). D'autre part, si $f \in \mathcal{C}^1(D)$, ∇f et donc $\sigma\nabla f$ sont également définies au sens des dérivées classiques. Une simple intégration par parties prouve que les deux définitions coïncident.

DÉFINITION 2.3. *On note $H(D,\mu,a\mu)$ l'espace des fonctions f de $L^2(D,\mu)$ telles que $\sigma\nabla f$ est défini dans $L^2(D,\mu)$*

$$H(D,\mu,a\mu) = \{f \in L^2(D,\mu)/\sigma\nabla f \in L^2(D,\mu)\},$$

et on met sur $H(D,\mu,a\mu)$ le produit scalaire

$$(f,g)_{H(D,\mu,a\mu)} = \int_D fg\,\mathrm{d}\mu + \int_D (\sigma\nabla f).(\sigma\nabla g)\,\mathrm{d}\mu$$

et la norme $\|\,\|_{H(D,\mu,a\mu)}$ correspondante.

Pour pouvoir étudier les propriétés de l'espace $H(D,\mu,a\mu)$, démontrons d'abord un premier résultat de convergence pour la norme $\|\,\|_{H(D,\mu,a\mu)}$. Pour cela, on utilise la suite régularisante $(J_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ définie par $J_\varepsilon(x) = (1/\varepsilon^d)J(x/\varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$, où J une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$0 \leqslant J \leqslant 1, \quad \operatorname{supp} J \subset \overline{B(0,1)} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^d} J(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

LEMME 2.4. *Soient D' et Δ des ouverts bornés de D tels que $D' \subset \overline{D'} \subset \Delta \subset \overline{\Delta} \subset D$. Soit f une fonction de $H(D,\mu,a\mu)$ nulle hors de D'. Pour tout ε inférieur à $d(D',\partial\Delta)$, $J_\varepsilon * f$ définie par $(J_\varepsilon * f)(x) = \int_D J_\varepsilon(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$ est $\mathcal{C}_c^\infty(\Delta)$. De plus, quand ε tend vers 0, $J_\varepsilon * f$ converge vers f dans $H(D,\mu,a\mu)$.*

Preuve. Puisque $\overline{\Delta}$ est compact dans D, les normes $\|\,\|_{L^2(\bar\Delta,\mathrm{d}x)}$ et $\|\,\|_{L^2(\bar\Delta,\mu)}$ sont équivalentes. Comme $f \in L^2(\overline{\Delta},\mu)$, $f \in L^2(\overline{\Delta},\mathrm{d}x)$ et le Lemme 2.18(b) de [1] assure alors que $J_\varepsilon * f \in \mathcal{C}_c^\infty(\Delta)$.

Comme f et $\sigma\nabla f$ appartiennent à $L^2(\Delta,\mu) = L^2(\Delta,\mathrm{d}x)$, d'après le lemme 2.18(c) de [1], on sait que $J_\varepsilon * f$ et $J_\varepsilon * (\sigma\nabla f)$ convergent respectivement vers f et $\sigma\nabla f$ dans $L^2(\Delta,\mathrm{d}x)$, donc dans $L^2(\Delta,\mu)$. Et comme f et $\sigma\nabla f$ sont à support dans D' cette convergence a également lieu dans $L^2(D,\mu)$. Pour montrer que $\|J_\varepsilon * f - f\|^2_{H(D,\mu,a\mu)}$ qui est majoré par

$$3\|J_\varepsilon * f - f\|^2_{L^2(D,\mu)} + 3\|\sigma\nabla(J_\varepsilon * f) - J_\varepsilon * (\sigma\nabla f)\|^2_{L^2(D,\mu)}$$
$$+3\|J_\varepsilon * (\sigma\nabla f) - \sigma\nabla f\|^2_{L^2(D,\mu)},$$

tend vers 0 quand ε tend vers 0, il suffit donc de montrer que

$$\|\sigma\nabla(J_\varepsilon * f) - J_\varepsilon * (\sigma\nabla f)\|^2_{L^2(D,\mu)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Pour pouvoir se ramener au cas où f est une fonction $\mathcal{C}^\infty$, on établit d'abord le résultat suivant

Pour tout ε *de* $]0; \min(d(D', \partial\Delta), d(\Delta, \partial D))[$*, pour toute fonction* g *de* $H(D, \mu, a\mu)$ *à support dans* D'*, on a* $\|\sigma\nabla(J_\varepsilon * g) - J_\varepsilon * (\sigma\nabla g)\|^2_{L^2(D,\mu)} \leqslant C^{\mathrm{ste}}\|g\|^2_{L^2(D',\mathrm{d}x)}$ *où* C^{ste} *est un nombre qui ne dépend que de* d, σ, p *et* J*.*

$$\|\sigma\nabla(J_\varepsilon * g) - J_\varepsilon * (\sigma\nabla g)\|^2_{L^2(D,\mu)}$$

$$= \int_\Delta \left|\sigma(x)\nabla\left(\int_{D'} J_\varepsilon(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\right)\right.$$

$$\left. - \int_{D'} J_\varepsilon(x-y)(\sigma\nabla g)(y)\,\mathrm{d}y\right|^2 p(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_\Delta \left|\sigma(x)\int_{D'} \nabla J_\varepsilon(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\right.$$

$$\left. + \int_{D'} \nabla.(\sigma^* J_\varepsilon(x-\cdot))(y)g(y)\,\mathrm{d}y\right|^2 p(x)\,\mathrm{d}x$$

par définition de $\sigma\nabla g$, puisque $J_\varepsilon(x-\cdot) \in \mathcal{C}^\infty_c(D)$ pour tout x de Δ.

$$= \int_\Delta \left|\int_{B(x,\varepsilon)} g(y)[\sigma(x) - \sigma(y)]\nabla J_\varepsilon(x-y)\right.$$

$$\left. + g(y)J_\varepsilon(x-y)\nabla.\sigma^*(y)\,\mathrm{d}y\right|^2 p(x)\,\mathrm{d}x$$

où $B(x,\varepsilon)$ est la boule fermée de centre x et de rayon ε.

On majore cette expression en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$\|\sigma\nabla(J_\varepsilon * g) - J_\varepsilon * (\sigma\nabla g)\|^2_{L^2(D,\mu)}$$

$$\leqslant \int_\Delta \varepsilon^d \,\mathrm{vol}\,(B(0,1)) \int_{B(x,\varepsilon)} |g(y)[\sigma(x) - \sigma(y)]\nabla J_\varepsilon(x-y)$$

$$+ g(y)J_\varepsilon(x-y)\nabla.\sigma^*(y)|^2\,\mathrm{d}y p(x)\,\mathrm{d}x$$

où $\mathrm{vol}\,(B(0,1))$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$.

$$\leqslant \varepsilon^d \,\mathrm{vol}\,(B(0,1)) \int_\Delta \int_{B(x,\varepsilon)} 2g^2(y) d\|\nabla\sigma\|^2_\infty |x-y|^2 |\nabla J_\varepsilon(x-y)|^2$$

$$+2g^2(y)J_\varepsilon^2(x-y)d\|\nabla\sigma\|_\infty^2\,\mathrm{d}y p(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2\varepsilon^d\,\mathrm{vol}(B(0,1))d\|\nabla\sigma\|_\infty^2\|p\|_\infty$$

$$\int_D g^2(y)\int_{\mathbb{R}^d}\left|\frac{1}{\varepsilon^d}\frac{1}{\varepsilon}\nabla J\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2\varepsilon^2+\left(\frac{1}{\varepsilon^d}J\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Enfin, on effectue le changement de variable $x\leftarrow x/\varepsilon$ pour obtenir

$$\|\sigma\nabla(J_\varepsilon * g)-J_\varepsilon*(\sigma\nabla g)\|_{L^2(D,\mu)}^2$$

$$\leqslant 2\,\mathrm{vol}(B(0,1))d\|\nabla\sigma\|_\infty^2\|p\|_\infty\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla J|^2+J^2\,\mathrm{d}x\right)\|g\|_{L^2(D',\mathrm{d}x)}^2,$$

ce qui démontre le résultat annoncé

Puisque $\mathcal{C}_c^\infty(D')$ est dense dans $L^2(D',\mathrm{d}x)$, il suffit maintenent de montrer que pour $f\in\mathcal{C}_c^\infty(D')$

$$\|\sigma\nabla(J_\varepsilon * f)-J_\varepsilon*(\sigma\nabla f)\|_{L^2(D,\mu)}^2\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0,$$

$$\|\sigma\nabla(J_\varepsilon * f)-J_\varepsilon*(\sigma\nabla f)\|_{L^2(D,\mu)}^2$$

$$=\int_D\left|\int_{\mathbb{R}^d}J_\varepsilon(x-y)[\sigma(x)-\sigma(y)]\nabla f(y)\,\mathrm{d}y\right|^2p(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_D\varepsilon^d|B(0,1)|\int_{\mathbb{R}^d}J_\varepsilon^2(x-y)\|\nabla\sigma\|_\infty^2|x-y|^2|\nabla f|^2(y)\,\mathrm{d}y p(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\varepsilon^d|B(0,1)|\,\|\nabla\|_\infty^2\|p\|_\infty\int_D\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{\varepsilon^d}J_\varepsilon(x-y)\varepsilon^2|\nabla f|^2(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

puisque J est inférieure à 1 sur $\mathbb{R}^d$.

$$\leqslant\varepsilon^2|B(0,1)|\,\|\nabla\sigma\|_\infty^2\|p\|_\infty\|J_\varepsilon*|\nabla f|^2\|_{L^1(D,\mathrm{d}x)},$$

et comme $|\nabla f|^2\in L^1(D,\mathrm{d}x)$, $\|J_\varepsilon*|\nabla f|^2\|_{L^1(D,\mathrm{d}x)}$ tend quand ε tend vers 0 vers $\|\,|\nabla f|^2\|_{L^1(D,\mathrm{d}x)}$, donc $\|\sigma\nabla(J_\varepsilon*f)-J_\varepsilon*(\sigma\nabla f)\|_{L^2(D,\mu)}$ converge vers 0. Ceci termine la preuve du Lemme 2.4. □

Une première conséquence de ce lemme est de donner plusieurs définitions équivalentes de $\sigma\nabla f$

PROPOSITION 2.5. *Pour une fonction $f\in L^2(D,\mu)$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) $\exists g_1 \in L^2(D,\mu)/\forall\varphi \in \mathcal{C}_c^1(D)$ $\quad \int_D \varphi g_1 \,\mathrm{d}x = -\int_D \nabla.(\varphi\sigma^*) f \,\mathrm{d}x$,
(ii) $\exists g_2 \in L^2(D,\mu)/\forall\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(D)$ $\quad \int_D \varphi g_2 \,\mathrm{d}x = -\int_D \nabla.(\varphi\sigma^*) f \,\mathrm{d}x$,
(iii) $\exists g_3 \in L^2(D,\mu)/\forall\varphi \in \mathcal{C}_c^1(D)$
$\quad \int_D \varphi g_3 \,\mathrm{d}\mu = -\int_D \nabla.(\varphi\sigma^*) f \,\mathrm{d}\mu - \int_D \varphi\sigma \frac{\nabla p}{p} f \,\mathrm{d}\mu$.

Les fonctions g_1, g_2 et g_3 ainsi définies sont uniques, et elles sont égales à $\sigma\nabla f$.

Preuve. Par définition, $g_1 = \sigma\nabla f$. L'unicité de g_1, g_2 et g_3 et leur égalité sont immédiates, elles découlent de la densité de $\mathcal{C}_c^1(D)$ dans $L^2(D,\mu)$ (ou de $\mathcal{C}_c^\infty(D)$ dans $L^2(K,\mathrm{d}x)$ pour tout compact K de D dans le cas de g_2).

L'implication (i) $\Rightarrow$ (iii) est évidente en remarquant que, pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(D)$, la fonction φp est $\mathcal{C}_c^1(D)$. De même, il est clair que (iii) implique (ii) puisque pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(D)$, la fonction φ/p appartient à $\mathcal{C}_c^1(D)$.

Il reste à montrer que (ii) implique (i). Supposons que f vérifie (ii). Pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(D)$, on peut trouver des ouverts bornés D' et Δ de D tels que $\operatorname{supp}\varphi \subset D' \subset \overline{D'} \subset \Delta \subset \overline{\Delta} \subset D$. Le Lemme 2.4 assure alors que

$$\forall\varepsilon < d(D',\partial\Delta)\ J_\varepsilon * \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Delta) \quad \text{et} \quad J_\varepsilon * \varphi \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{H(D,\mu,a\mu)} \varphi.$$

Par définition de g_2

$$\begin{aligned}\int_D (J_\varepsilon * \varphi) g_2 \,\mathrm{d}x &= -\int_D \nabla.((J_\varepsilon * \varphi)\sigma^*) f \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_D (J_\varepsilon * \varphi)(\nabla.\sigma^*) f \,\mathrm{d}x - \int_D \sigma\nabla(J_\varepsilon * \varphi) f \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Et comme $J_\varepsilon * \varphi$ et $\sigma\nabla(J_\varepsilon * \varphi)$ convergent vers φ et $\sigma\nabla\varphi$ dans $L^2(D,\mu)$ et donc dans $L^2(\Delta,\mathrm{d}x)$, on peut faire tendre ε vers 0 dans l'égalité précédente et on obtient

$$\int_D \varphi g_2 \,\mathrm{d}x = -\int_D \varphi(\nabla.\sigma^*) f \,\mathrm{d}x - \int_D \sigma\nabla\varphi f \,\mathrm{d}x = -\int_D \nabla.(\varphi\sigma^*) f \,\mathrm{d}x,$$

ce qui montre que f vérifie (i), avec $g_1 = g_2$. □

PROPOSITION 2.6. *Si $f \in H(D,\mu,a\mu)$ et $g \in \mathcal{C}_b^1(D)$ alors $fg \in H(D,\mu,a\mu)$ et $\sigma\nabla(fg) = g\sigma\nabla f + f\sigma\nabla g$.*

Preuve. Les hypothèses mises sur f et g (et le fait que σ est bornée) assurent que $fg \in L^2(D,\mu)$ et que $g\sigma\nabla f + f\sigma\nabla g \in L^2(D,\mu)$. De plus, pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(D)$, on a $\nabla.(\varphi g\sigma^*) = \nabla.(\varphi\sigma^*)g + \varphi\sigma\nabla g$ puisque φ, g et σ sont $\mathcal{C}^1$, donc

$$\begin{aligned}\int_D \varphi(g\sigma\nabla f + f\sigma\nabla g) \,\mathrm{d}x &= -\int_D \nabla.(\varphi g\sigma^*) f \,\mathrm{d}x + \int_D \varphi\sigma\nabla g f \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_D \nabla.(\varphi\sigma^*) fg \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$ □

Si σ est uniformément elliptique et p uniformément minorée par un nombre strictement positif, $H(D,\mu,a\mu)$ est égal à $H^1(D)$. Même quand σ et p peuvent dégénérer, $H(D,\mu,a\mu)$ conserve certaines propriétés classique de $H^1(D)$. En particulier

PROPOSITION 2.7. *L'espace $H(D,\mu,a\mu)$ est un espace de Hilbert.*

THÉORÈME 2.8. *Le sous-espace $\mathcal{C}^\infty(D)\cap H(D,\mu,a\mu)$ est dense dans l'espace de Hilbert $H(D,\mu,a\mu)$.*

La Proposition 2.7 est aisée à démontrer, en utilisant la définition de $\sigma\nabla$ et la complétude de $L^2(D,\mu)$

Preuve. Il faut montrer que $(H(D,\mu,a\mu),\|\ \|_{H(D,\mu,a\mu)})$ est complet. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans $H(D,\mu,a\mu)$. Les suites $(u_n)_n$ et $(\sigma\nabla u_n)_n$ sont de Cauchy dans $L^2(D,\mu)$, donc elles convergent et leurs limites respectives f et g appartiennent à $L^2(D,\mu)$. Pour $\varphi\in\mathcal{C}^1_c(D)$, les fonctions φ/p et $(1/p)\nabla.(\varphi\sigma^*)$ appartiennent à $L^2(D,\mu)$, donc on peut passer à la limite dans l'égalité (IPP) vérifiée par u_n

$$\int_D \frac{\varphi}{p}\sigma\nabla u_n p\,\mathrm{d}x = \int_D \frac{1}{p}\nabla.(\varphi\sigma^*)u_n p\,\mathrm{d}x.$$

On obtient alors l'égalité (IPP) pour f avec $\sigma\nabla f = g$, ce qui prouve que f est la limite de $(u_n)_n$ dans $H(D,\mu,a\mu)$, et donc que $H(D,\mu,a\mu)$ est complet. □

Pour démontrer le Théorème 2.8, on utilise le Lemme 2.4

Fixons $u\in H(D,\mu,a\mu)$ et $\eta>0$. On cherche $\Phi\in\mathcal{C}^\infty(D)$ telle que $\|u-\Phi\|_{H(D,\mu,a\mu)}\leqslant\eta$.

Notons $D'_k = D''_{k-1}-\overline{D''_{k+1}}$ où $D''_k=\{x\in D/|x|<k \text{ et } d(x,\partial D)>1/k\}$. La famille d'ouverts $(D'_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ recouvre D donc d'après le Théorème 3.14 de [1], il existe une collection Ψ de fonctions ψ de $\mathcal{C}^\infty_c(D)$ telle que les $\psi\in\Psi$ sont à valeurs dans [0, 1], pour chaque compact K de D le nombre de $\psi\in\Psi$ non identiquement nulles sur K est fini, chaque $\psi\in\Psi$ est à support dans l'un des D'_k et $\sum_{\psi\in\Psi}\psi(x)=1$ pour tout x de D (il s'agit d'une somme finie). On note ψ_k la somme (finie car $\overline{D'_k}$ est un compact de D) des $\psi\in\Psi$ vérifiant supp $\psi\subset D'_k$ et supp $\psi\not\subset D'_{k-1}$. On a alors

$$\psi_k\in\mathcal{C}^\infty_c(D'_k)\quad\text{et}\quad\forall x\in D\quad\sum_{k=1}^{+\infty}\psi_k(x)=1.$$

Pour chaque $k\in\mathbb{N}^*$, grâce à la Proposition 2.6, on sait que $\psi_k u\in H(D,\mu,a\mu)$ et que $\sigma\nabla(\psi_k u)=\sigma(\nabla\psi_k)u+\psi_k\sigma\nabla u$. D'autre part, supp $(\psi_k u)\subset D'_k$ donc on peut appliquer le Lemme 2.4 à $\psi_k u$, D'_k et $\Delta_k = D'_{k-1}\cup D'_k\cup D'_{k+1}$ et on obtient

$$\forall\varepsilon\in\left]0;\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right[\ J_\varepsilon*(\psi_k u)\in\mathcal{C}_c^\infty(\Delta_k)\quad\text{et}$$

$$J_\varepsilon*(\psi_k u)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{H(D,\mu,a\mu)}\psi_k u.$$

On peut donc choisir

$$\varepsilon_k\in\left]0;\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right[\text{ tel que }\|J_{\varepsilon_k}*(\psi_k u)-\psi_k u\|_{H(D,\mu,a\mu)}\leqslant\frac{\eta}{2^k}.$$

La fonction $\Phi=\sum_{k=1}^{+\infty}J_{\varepsilon_k}*(\psi_k u)$ est alors $\mathcal{C}^\infty$ sur D (car la somme est finie au voisinage de tout point de D). De plus, on a

$$\|\Phi-u\|_{H(D,\mu,a\mu)}\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}\|J_{\varepsilon_k}*(\psi_k u)-\psi_k u\|_{H(D,\mu,a\mu)}\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\eta}{2^k}=\eta.$$

Donc le Théorème 2.8 est démontré.

REMARQUE 2.9. Dans la définition de $H(D,\mu,a\mu)$ et dans les démonstrations qui suivent, on n'utilise pas le fait que la mesure μ est de masse totale finie. En particulier, si on note dx la mesure de Lebesgue, $H(D,\mathrm{d}x,a\,\mathrm{d}x)$ est défini et c'est un espace de Hilbert qui admet $\mathcal{C}^\infty(D)\cap H(D,\mathrm{d}x,a\,\mathrm{d}x)$ comme sous-espace dense.

REMARQUE 2.10. Pour les besoins des sections ultérieures, on a choisi ici de travailler avec un σ très régulier. Cependant, la définition de $H(D,\mu,a\mu)$ reste valide, et les résultats précédents vrais, si σ est seulement bornée à dérivée bornée.

2.2. FORMES ET SEMI-GROUPES

Dans la suite, on dira que $(\mathcal{E}^1,\mathcal{D}(\mathcal{E}^1))$ est une *forme* sur $L^2(D,\mu)$ si $\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)$ est un sous-espace dense de $L^2(D,\mu)$ et $\mathcal{E}^1$ une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)$.

Si $(\mathcal{E}^1,\mathcal{D}(\mathcal{E}^1))$ et $(\mathcal{E}^2,\mathcal{D}(\mathcal{E}^2))$ sont deux formes sur $L^2(D,\mu)$, $(\mathcal{E}^2,\mathcal{D}(\mathcal{E}^2))$ est une *extension* de $(\mathcal{E}^1,\mathcal{D}(\mathcal{E}^1))$ si on a $\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)\subset\mathcal{D}(\mathcal{E}^2)$ et $\forall f\in\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)\mathcal{E}^2(f,f)=\mathcal{E}^1(f,f)$.

La forme $(\mathcal{E}^1,\mathcal{D}(\mathcal{E}^1))$ sera dite *fermée* si $\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)$ muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)}=\sqrt{\mathcal{E}^1(f,f)+\|f\|^2_{L^2(D,\mu)}}$$

est un espace de Hilbert. Elle sera dite *fermable* si elle a une extension $(\mathcal{E}^2,\mathcal{D}(\mathcal{E}^2))$ qui est une forme fermée sur $L^2(D,\mu)$.

Si $(\mathcal{E}^1, \mathcal{D}(\mathcal{E}^1))$ est fermable, elle admet une plus petite extension fermée $(\overline{\mathcal{E}^1}, \mathcal{D}(\overline{\mathcal{E}^1}))$ définie par: $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{E}^1})$ est le complété de $\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)$ pour $\| \|_{\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)}$ dans $L^2(D,\mu)$ et $\forall u \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{E}^1}), \overline{\mathcal{E}^1}(u,u) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{E}^1(u_n,u_n)$ où $(u_n)_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)$ qui converge vers u en norme $\| \|_{\mathcal{D}(\mathcal{E}^1)}$.

La forme $(\mathcal{E}^1, \mathcal{D}(\mathcal{E}^1))$ sera dite *markovienne* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\Phi_\varepsilon : \mathbb{R} \to [-\varepsilon; 1+\varepsilon]$ telle que $\forall t \in [0;1] \Phi_\varepsilon(t) = t, \forall t < t' 0 \leqslant \Phi_\varepsilon(t') - \Phi_\varepsilon(t) \leqslant t' - t$ et

$$\forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^1) \quad \Phi_\varepsilon \circ u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^1) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^1(\Phi_\varepsilon \circ u, \Phi_\varepsilon \circ u) \leqslant \mathcal{E}^1(u,u).$$

DÉFINITION 2.11. *On dit que la forme* $(\mathcal{E}^1, \mathcal{D}(\mathcal{E}^1))$ *est une forme de Dirichlet si elle est markovienne et fermée.*

En particulier, comme la plus petite extension fermée d'une forme markovienne fermable est markovienne (cf [14] Thm. 2.1.1) c'est une forme de Dirichlet.

Les principales propriétés que peut avoir une forme de Dirichlet sont les suivantes.

La forme de Dirichlet $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ est dite *régulière* si $\mathcal{C}_c(D) \cap \mathcal{D}(\mathcal{E})$ est dense dans $\mathcal{C}_c(D)$ pour la norme uniforme $\| \|_\infty$ et dans $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ pour la norme $\| \|_{\mathcal{D}(\mathcal{E})}$.

Elle est dite *locale* si

$$\forall f,g \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \quad f,g \text{ à supports compacts disjoints} \Rightarrow \mathcal{E}(f,g) = 0.$$

A une forme fermée sont associés un semi-groupe fortement continu, une résolvante fortement continue et un générateur (cf [14] ou [15]). Lorsque $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ est une forme de Dirichlet, son semi-groupe $(T_t)_{t>0}$ permet de lui associer une probabilité faiblement markovienne Q définie par

$$\forall f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathcal{C}_b(\mathcal{D}) \quad \text{et} \quad \forall 0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_k,$$

$$\begin{aligned} &E^Q(f_1(X_{t_1}) f_2(X_{t_2}) \cdots f_k(X_{t_k})) \\ &\quad = \int_D f_1 T_{t_2-t_1}(f_2 T_{t_3-t_2}(\cdots f_{k-1} T_{t_k-t_{k-1}}(f_k)) \cdots) \, \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Essentiellement, la régularité de $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ correspond à la forte markoviannité de Q (plus exactement, elle est équivalente au fait que Q est la loi d'un processus de Hunt) et la propriété locale correspond à la continuité des trajectoires Q-presque sûrement (lorsque la forme est régulière). Ce lien est détaillé dans [14] Chap. 4.

2.3. LA FORME DE DIRICHLET $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$

On définit la forme $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ sur $L^2(D,\mu)$ par

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{E}^s) = H(D,\mu,a\mu), \\ \forall f,g \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s) \quad \mathcal{E}^s(f,g) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_D \sigma\nabla f.\sigma\nabla g \, \mathrm{d}\mu. \end{cases}$$

La norme $\| \, \|_{\mathcal{D}(\mathcal{E}^s)}$ est équivalente à la norme $\| \, \|_{H(D,\mu,a\mu)}$, et $H(D,\mu,a\mu)$ est une espace de Hilbert pour cette norme, donc $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est une forme fermée par définition. Pour montrer que $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est markovienne, il suffit de montrer que c'est la plus petite extension fermée d'une forme markovienne. Considérons la forme $(\mathcal{E}^c,\mathcal{D}(\mathcal{E}^c))$ définie par

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{E}^c) = \mathcal{C}^\infty(D) \cap H(D,\mu,a\mu) \\ \qquad\qquad = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(D) \cap L^2(D,\mu) \,\Big/ \frac{1}{2}\int_D \nabla f.a\nabla f \,\mathrm{d}\mu < +\infty \right\}, \\ \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^c) \quad \mathcal{E}^c(f,f) = \frac{1}{2}\int_D \nabla f.a\nabla f \,\mathrm{d}\mu. \end{cases}$$

Pour $\varepsilon > 0$ et $\varphi\colon \mathbb{R} \to [-\varepsilon; 1+\varepsilon]\mathcal{C}^\infty$ telle que $\varphi(t) = t$ sur [0,1] et $0 \leqslant \varphi' \leqslant 1$, si $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^c)$ on a

$$\begin{aligned} \int_D \nabla(\varphi\circ f).a\nabla(\varphi\circ f)\,\mathrm{d}\mu &= \int_D (\varphi'\circ f)^2 \nabla f.a\nabla f \,\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \int_D \nabla f.a\nabla f\,\mathrm{d}\mu < +\infty, \end{aligned}$$

donc $\varphi\circ f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^c)$ et $\mathcal{E}^c(\varphi\circ f,\varphi\circ f) \leqslant \mathcal{E}^c(f,f)$, ce qui assure que $(\mathcal{E}^c,\mathcal{D}(\mathcal{E}^c))$ est markovienne.

La forme $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est une extension de $(\mathcal{E}^c,\mathcal{D}(\mathcal{E}^c))$, et c'est la plus petite car $\mathcal{D}(\mathcal{E}^c)$ est dense dans $\mathcal{D}(\mathcal{E}^s)$ pour la norme $\| \, \|_{\mathcal{D}(\mathcal{E}^s)}$ (cf Thm. 2.8). Par conséquent, $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est markovienne, c'est donc une forme de Dirichlet sur $L^2(D,\mu)$.

REMARQUE 2.12. Lorsqu'on travaille sur $\mathbb{R}^d$ tout entier et pour $\sigma \equiv \mathrm{Id}$, on peut essayer de caractériser les fonctions du domaine de $\mathcal{E}^s$ en terme de Gâteaux-dérivabilité locale, comme dans [2]. Voir aussi [7] pour un exposé plus élémentaire dans le cas $\mathbb{R}^d$. Ici, la présence du bord empêche d'adopter cette approche.

On note $(T_t^s)_{t>0}, (R_\alpha^s)_{\alpha>0}$, et $(A^s,\mathcal{D}(A^s))$ respectivement le semi-groupe, la résolvante et le générateur associés.

Il est immédiat que $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ possède la propriété locale, par contre elle n'est pas régulière a priori. Pour étudier la loi Q^s associé à $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$, une première idée est d'approcher cette forme non régulière par des formes $(\mathcal{E}^n,\mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ régulières, et de montrer que les lois Q^n associées convergent vers Q^s. C'est que nous ferons aux Sections 3, 4 et 5 Cela permet de montrer que Q^s est la loi d'une semi-martingale. Une autre idée est de se placer sur une compactification $\tilde{D}$ de D sur laquelle $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est régulière, comme nous le ferons à la Section 6. Les deux approches sont complémentaires puisque de la décomposition en semi-martingale on déduit la forme du terme de réflexion au bord de $\tilde{D}$.

Avant d'aborder la section suivante, nous établissons une condition suffisante de régularité qui servira par la suite et un résultat de maximalité de $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ sous la condition de Hörmander.

2.4. À PROPOS DE LA RÉGULARITÉ DE $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$

On sait déjà que $\mathcal{C}^\infty(D) \cap H(D, \mu, a\mu)$ est dense dans $H(D, \mu, a\mu)$.

Le fait que $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ soit une forme de Dirichlet assure que (cf [14] Thm. 1.4.2)

$$\forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (-n) \vee (u \wedge n) \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \quad \text{et}$$

$$(-n) \vee (u \wedge n) \xrightarrow[n \to +\infty]{\| \|_{\mathcal{D}(\mathcal{E})}} u,$$

donc $L^\infty(D) \cap H(D, \mu, a\mu)$ est dense dans $H(D, \mu, a\mu)$.

Et de plus, on peut vérifier dans la démonstration du Théorème 2.8 que si $u \in H(D, \mu, a\mu)$ est bornée, la fonction $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(D)$ qui l'approche l'est aussi. Par conséquent, $L^\infty(D) \cap \mathcal{C}^\infty(D) \cap H(D, \mu, a\mu)$ est dense dans $H(D, \mu, a\mu)$. On peut en déduire que dans le cas où la frontière de D ne joue aucun rôle, soit parce qu'elle est vide (cas où $D = \mathbb{R}^d$), soit parce que a et p décroissent très vite à son approche, $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est régulière. Construisons d'abord la 'distance régularisée à D^c' (cf [26] p. 171).

PROPOSITION 2.13. *Il existe une fonction* $\delta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ *qui est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* D *et de gradient* $\nabla \delta$ *borné sur* D *telle que*

$$\exists C_1, C_2 > 0 / \forall x \in D \quad C_1 d(x, D^c) \leqslant \delta(x) \leqslant C_2 d(x, D^c).$$

Voici deux cas simples où $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est régulière

PROPOSITION 2.14. (i) *Si* $D = \mathbb{R}^d$ *alors* $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ *est un sous-espace dense de* $H(\mathbb{R}^d, \mu, a\mu)$.

(ii) *de même, si* $D \neq \mathbb{R}^d$ *et s'il existe une fonction* $\alpha :]0; \sup_D \delta[\to]0; +\infty[$ *continue telle que*

$$\int_x^{\sup_D \delta} \frac{1}{\sqrt{\alpha(y)}} \, \mathrm{d}y \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty \quad \textit{et} \quad \forall x \in D \quad ((\nabla \delta . a \nabla \delta) p)(x) \leqslant \alpha(\delta(x)),$$

alors $\mathcal{C}_c^\infty(D)$ *est un sous-espace dense de* $H(D, \mu, a\mu)$.

Preuve. Démontrons ce résultat dans le cas où $D \neq \mathbb{R}^d$.

Il suffit de montrer que $\mathcal{C}_c^\infty(D)$ est dense dans $L^\infty(D) \cap \mathcal{C}^\infty(D) \cap H(D, \mu, a\mu)$ pour la norme $\| \|_{H(D,\mu,a\mu)}$. Soit Φ un élément de $L^\infty(D) \cap \mathcal{C}^\infty(D) \cap H(D, \mu, a\mu)$ et soit $\varepsilon > 0$.

Posons

$$\beta(x) = \int_x^{\sup_D \delta} \frac{1}{\sqrt{\alpha(y)}} \, \mathrm{d}y \quad \text{et} \quad \ell_n = \beta^{-1}(n) \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

D'après les conditions mises sur α, ℓ_n décroît vers 0 quand $n \to +\infty$. On choisit une fonction $\xi \mathcal{C}^\infty$ décroissante sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{1}_{x\leqslant 0} \leqslant \xi \leqslant \mathbb{1}_{x\leqslant 1}$, et on pose pour $m, n \in \mathbb{N}^*$

$$\xi_{m,n}(x) = \xi(\|x\| - m)\xi(\beta(\delta(x)) - n),$$

$$K_{m,n} = \{x \in D / \|x\| \leqslant m \quad \text{et} \quad \delta(x) \geqslant \ell_n\}.$$

La fonction $\xi_{m,n}$ est $\mathcal{C}^1$ à support compact dans D, égale à 1 sur $K_{m,n}$ et nulle sur $D - K_{m+1,n+1}$. Elle a pour dérivée

$$\begin{aligned}(\nabla \xi_{m,n})(x) \;=\; & (\nabla \|x\|)\xi'(\|x\| - m)\xi(\beta(\delta(x)) - n) \\ & + \xi(\|x\| - m)(\nabla \delta)(x) \left(\frac{-1}{\sqrt{\alpha(\delta(x))}} \right) \xi'(\beta(\delta(x)) - n).\end{aligned}$$

Les fonctions $\xi_{m,n}\Phi$ sont des fonction $\mathcal{C}_c^1(D)$. Vérifions qu'elles convergent vers Φ en norme $\| \; \|_{H(D,\mu,a\mu)}$. En utilisant $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$, on obtient

$$\begin{aligned}& \|\Phi - \xi_{m,n}\Phi\|^2_{H(D,\mu,a\mu)} \\ & \leqslant \int_D (1 - \xi_{m,n})^2 \Phi^2 p \,\mathrm{d}x + 2 \int_D (1 - \xi_{m,n})^2 \|\sigma \nabla \Phi\|^2 p \,\mathrm{d}x \\ & \quad + 2 \int_D \Phi^2 \|\sigma \nabla \xi_{n,m}\|^2 p \,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \|\Phi - \xi_{m,n}\Phi\|^2_{H(D,\mu,a\mu)} \\ & \leqslant \int_{D - K_{m,n}} (\Phi^2 + 2\nabla\Phi . a \nabla\Phi) p dx \\ & \quad + 4\|a\|_\infty \|\xi'\|^2_\infty \int_{m \leqslant \|x\| \leqslant m+1} \Phi^2 p \,\mathrm{d}x \\ & \quad + 4\|\Phi\|^2_\infty \|\xi'\|^2_\infty \int_{\substack{\|x\| \leqslant m+1 \\ \ell_{n+1} \leqslant \delta(x) \leqslant \ell_n}} (\nabla \delta . a \nabla \delta)(x) \frac{1}{\alpha(\delta(x))} p \,\mathrm{d}x \\ & \leqslant (2 + 4\|a\|_\infty \|\xi'\|^2_\infty) \int_{D - K_{m,n}} (\Phi^2 + \nabla\Phi . a \nabla\Phi) p \,\mathrm{d}x \\ & \quad + 4\|\Phi\|^2_\infty \|\xi'\|^2_\infty \int_{\substack{\|x\| \leqslant m+1 \\ \ell_{n+1} \leqslant \delta(x) \leqslant \ell_n}} \mathrm{d}x \\ & \leqslant (2 + 4\|a\|_\infty \|\xi'\|^2_\infty) \int_{\|x\| \geqslant m} (\Phi^2 + \nabla\Phi . a \nabla\Phi) p \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$+(2+4\|a\|_\infty\|\xi'\|_\infty^2+4\|\Phi\|_\infty^2\|\xi'\|_\infty^2)$$
$$\int_{\substack{\|x\|\leqslant m+1\\ \delta(x)\leqslant \ell_n}}(\Phi^2 p+(\nabla\Phi.a\nabla\Phi)p+1)\,\mathrm{d}x.$$

Comme $\Phi\in H(D,\mu,a\mu)$, on peut trouver $m_0\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$\int_{\|x\|\geqslant m_0}(\Phi^2+\nabla\Phi.a\nabla\Phi)p\,\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon.$$

D'autre part,

$$\int_{\|x\|\leqslant m_0+1}(\Phi^2 p+(\nabla\Phi.a\nabla\Phi)p+1)\,\mathrm{d}x<+\infty\quad\text{et}\quad \ell_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0,$$

donc on peut trouver $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$\int_{\substack{\|x\|\leqslant m_0+1\\ \delta(x)\leqslant \ell_{n_0}}}(\Phi^2 p+(\nabla\Phi.a\nabla\Phi)p+1)\,\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon.$$

On a alors $\|\Phi-\xi_{m_0-n_0}\Phi\|^2_{H(D,\mu,a\mu)}\leqslant C^{\mathrm{ste}}\varepsilon$ où C^{ste} ne dépend que de Φ, a et ξ. Comme $\xi_{m_0,n_0}\Phi\in\mathcal{C}_c^1(D)$, ceci prouve que $\mathcal{C}_c^1(D)$ est dense dans $H(D,\mu,a\mu)$. Comme, d'autre part, $\mathcal{C}_c^\infty(D)$ est dense dans $\mathcal{C}_c^1(D)$ pour la norme de $H^1(D)$, donc pour la norme de $H(D,\mu,a\mu)$ puisque σ et p sont bornées, la preuve de l'assertion (ii) est finie.

Dans le cas où $D=\mathbb{R}^d, \beta$ n'est plus nécessaire, il suffit de poser $\xi_m(x)=\xi(\|x\|-m)$ et on montre de la même façon que $(\xi_m\Phi)_m$ est une suite de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui converge dans $H(\mathbb{R}^d,\mu,a\mu)$ vers Φ, □

REMARQUE 2.15. La démonstration précédente n'utilise pas le fait que μ est de masse totale finie. Dans le prolongement de la Remarque 2.9, on peut donc noter qu'on a aussi démontré ici que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H(\mathbb{R}^d,\mathrm{d}x,a\,\mathrm{d}x)$.

En général, $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ n'est pas régulière sur D. On peut étendre $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ à $\overline{D}$ en posant $\mu(\partial\overline{D})=0$, ce qui permet d'identifier $L^2(D,\mu)$ et $L^2(\overline{D},\mu)$ (cf Sect. 6.1). Voici un cas où $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ ainsi définie sur $\overline{D}$ est régulière.

On dit que D a la propriété de segment s'il vérifie

$$\forall x\in\partial D\quad \begin{array}{l}\exists U_x \text{ voisinage ouvert de } x\\ \exists y_x\in\mathbb{R}^d-\{0\}\end{array}\Big/\begin{array}{l}\forall z\in\overline{D}\cap U_x\\ \forall t\in]0,1[\end{array}\quad z+ty_x\in D.$$

Si D a la propriété de segment, alors la forme de Dirichlet associée au brownien réfléchi dans $\overline{D}$ (i.e. $\mathcal{E}^s$ avec $\sigma=\mathrm{Id}$ et $p=1$) est régulière sur $\overline{D}$. En effet, le domaine de cette forme est $H^1(D)$ et la propriété de segment entraîne la densité dans $H^1(D)$ de l'ensemble des restrictions à D des fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ (cf [1]). De même, si D a la propriété de segment, toute forme $\mathcal{E}^s$ associée à une matrice de diffusion a uniformément elliptique et une densité p uniformément minorée par un nombre strictement positif est régulière sur $\overline{D}$ (car $\mathcal{D}(\mathcal{E}^s)) = H^1(\underline{D}))$.

Mais dans de nombreux cas, $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ n'est pas régulière sur $\overline{D}$. On peut alors chercher une fermeture $\tilde{D}$ de D, autre que la fermeture euclidienne $\overline{D}$, sur laquelle elle soit régulière. Dans le cas où $\sigma = \mathrm{Id}$ et $p = 1$ sur D borné, il existe toujours (au moins) une compactification $\tilde{D}$ de D sur laquelle $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est régulière (cf [10] Sect. 3, et les références qui s'y trouvent). Cette propriété s'étend immédiatement au cas où σ est uniformément elliptique et p uniformément minorée par un nombre strictement positif, et même (cf Prop. 7.3) au cas où σ est uniformément elliptique et p vérifie (HSP).

CONJECTURE 2.16. *$H^1(D)$ est dense dans $H(D, \mu, a\mu)$ dès lors que (σ, p) vérifie* (HSP).

(Il est même vraisemblable que $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ soit la plus petite extension fermée de $(\mathcal{E}^s, H^1(D)))$.

Si cette affirmation est vraie, toute compactification $\tilde{D}$ qui rend régulière la forme associée au brownien réfléchi (i.e. $\sigma = \mathrm{Id}$ et $p = 1$) rendra également régulière $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ pour σ et p vérifiant (HSP) quelconques. Nous n'avons pas de contre-exemple à cette affirmation, mais nous ne savons pas la démontrer dans le cas général (voir à la Sect. 7 quelques cas simples où nous savons la démontrer).

2.5. SOUS LA CONDITION DE HÖRMANDER

On se place ici dans le cas où σ et p sont $\mathcal{C}^\infty$ et vérifient la condition de Hörmander. On va alors pouvoir caractériser $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ en montrant qu'elle est maximale. Rappelons d'abord la condition de Hörmander. On se base sur [16] Chap. 22.2, p 353 à 357. Le théorème général est le suivant.

Si les L_i sont des champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur D vérifiant dim Vect $\{L_{j_0}, [L_{j_1}, L_{j_2}], [L_{j_1}, [L_{j_2}, L_{j_3}]], \dots\} = d$ en tout point x de D (i.e. l'algèbre de Lie engendrée par les L_i est de dimension d en tout point) et si $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(D)$ alors $\sum_{i=1}^d L_i^2 f + L_0 f - \alpha f \in H^k_{\mathrm{loc}}(D)$ implique $f \in H^k_{\mathrm{loc}}(D)$.

On prend

$$\begin{aligned} Lf &= \frac{\nabla.(ap\nabla f)}{2p} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{ijk} \sigma_{ki}\partial_i(\sigma_{kj}\partial_j f) + \sigma_{kj}\frac{\partial_i(\sigma_{ki}p)}{p}\partial_j f = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^d L_k^2 f + L_0 f, \end{aligned}$$

où $\sigma_i = (\sigma_{ij})_j, L_k f = \sigma_k.\nabla f$ et $L_0 f = (\nabla.(\sigma^* p)/2p)\sigma\nabla f$. On a alors le résultat suivant.

THÉORÈME 2.17. *Si on suppose que $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(D)$, que $p \in \mathcal{C}^\infty(D)$ et que la condition de Hörmander est vérifiée dans D alors toute solution* (*au sens des distributions*) *de l'équation $(L-\alpha)f = 0$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(D)$.*

En intégrant par parties dans la relation

$$\mathcal{E}^s(f,f) = \frac{1}{2}\int_D \nabla f.a\nabla f \,\mathrm{d}\mu = -(f, A^s f)_{L^2(D\mu)},$$

on observe que le générateur $(A^s, \mathcal{D}(A^s))$ associé à $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ coïncide sur $\mathcal{C}_c^\infty(D)$ avec l'opérateur L défini par

$$\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(D) \quad Lf = \frac{\nabla.(ap\nabla f)}{2p}.$$

La proposition suivante assure que si σ et p sont $\mathcal{C}^\infty(D)$ et si la condition de Hörmander est vérifiée, $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est maximale au sens de [14] Section 2.3.

PROPOSITION 2.18. *Si $(B, \mathcal{D}(B))$ est une extension auto-adjointe markovienne négative de $(L, \mathcal{C}_c^\infty(D))$ alors la forme de Dirichlet $(\mathcal{E}^B, \mathcal{D}(\mathcal{E}^B))$ de générateur $(B, \mathcal{D}(B))$ vérifie*

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}^B) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}^s) \quad \textit{et} \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^B) \quad \mathcal{E}^B(f,f) \geqslant \mathcal{E}^s(f,f).$$

Preuve. (analogue à celle du Thm. 2.3 de [23]). On fixe $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^B)$ et on veut montrer que $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s)$. On note $(\mathcal{E}^L, \mathcal{D}(\mathcal{E}^L))$ la plus petite extension fermée (et donc markovienne) de la forme $(-(\cdot, L\cdot)_{L^2(D,\mu)}, \mathcal{C}_c^\infty(D))$ (dont on vérifie aisément qu'elle est markovienne fermable). Pour chaque $\alpha > 0$, on note $\mathcal{E}_\alpha^B(f,g) = \mathcal{E}^B(f,g) + \alpha(f,g)_{L^2(D,\mu)}$. Le produit scalaire ainsi défini induit sur $\mathcal{D}(\mathcal{E}^B)$ une norme équivalente à $\| \|_{\mathcal{D}(\mathcal{E}^B)}$. On décompose l'espace de Hilbert $(\mathcal{D}(\mathcal{E}^B), \sqrt{\mathcal{E}_\alpha^B})$ en

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}^B) = \mathcal{D}(\mathcal{E}^L) \oplus (\mathcal{N}_\alpha \cap \mathcal{D}(\mathcal{E}^B)) \quad \text{où}$$
$$\mathcal{N}_\alpha = \{u \in \mathcal{D}(L^*)/(\alpha - L^*)u = 0\},$$

(on peut le faire d'après le Lem. 2.3.2 de [14]).

Par conséquent $f = f_0 + u$ où $f_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^L)$ et $u \in (\mathcal{N}_\alpha \cap \mathcal{D}(\mathcal{E}^B))$ sont uniques.

- $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est une extension fermée de $(-(\cdot, L\cdot)_{L^2(D,\mu)}, \mathcal{C}_c^\infty(D))$ donc de $(\mathcal{E}^L, \mathcal{D}(\mathcal{E}^L))$ donc $\mathcal{D}(\mathcal{E}^L) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}^s)$ et $f_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s)$.
- $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^B)$ donc $u \in L^2(D,\mu)$. $u \in \mathcal{N}_\alpha$ donc u vérifie

$$\forall g \in \mathcal{C}_c^\infty(D) \int_D u\left(\alpha g - \frac{\nabla.(ap\nabla g)}{2p}\right) \mathrm{d}\mu = 0,$$

et au sens des ditributions: $((\nabla.(ap\nabla)/2p)-\alpha)u=0$. Puisqu'on a supposé ici σ et $p\mathcal{C}^\infty$ et la condition de Hörmander vérifiée, on peut en déduire que $u\in\mathcal{C}^\infty(D)$.

En suivant la même démarche que dans [23], on obtient que $\mathcal{E}^s(u,u)\leqslant\mathcal{E}^B(u,u)<+\infty$ d'où $u\in\mathcal{D}(\mathcal{E}^s)$. Par conséquent $f=f_0+u\in\mathcal{D}(\mathcal{E}^s)$ et $\mathcal{D}(\mathcal{E}^B)\subset\mathcal{D}(\mathcal{E}^s)$.

- La décomposition étant orthogonale, on peut utiliser le théorème de Pythagore

$$\mathcal{E}^B_\alpha(f,f)=\mathcal{E}^B_\alpha(f_0,f_0)+\mathcal{E}^B_\alpha(u,u)\leqslant\mathcal{E}^s_\alpha(f_0,f_0)+\mathcal{E}^s_\alpha(u,u),$$

car $f_0\in\mathcal{D}(\mathcal{E}^L)\Rightarrow\mathcal{E}^L(f_0,f_0)=\mathcal{E}^s(f_0,f_0)=\mathcal{E}^B(f_0,f_0)$ et $\mathcal{E}^s(u,u)\leqslant\mathcal{E}^B(u,u)$.

Il existe une décomposition orthogonale analogue pour $(\mathcal{D}(\mathcal{E}^s),\sqrt{\mathcal{E}^s_\alpha})$

$$f\in\mathcal{D}(\mathcal{E}^s)\Rightarrow\exists!h_0\in\mathcal{D}(\mathcal{E}^L)\quad\exists!h_1\in(\mathcal{N}_\alpha\cap\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))/f=h_0+h_1,$$

$(\mathcal{N}_\alpha\cap\mathcal{D}(\mathcal{E}^B))\subset(\mathcal{N}_\alpha\cap\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ donc par unicité $h_0=f_0$ et $h_1=u$ ce qui donne $\mathcal{E}^s_\alpha(f,f)=\mathcal{E}^s_\alpha(f_0,f_0)+\mathcal{E}^s_\alpha(u,u)$ et

$$\mathcal{E}^B(f,f)\geqslant\mathcal{E}^s(f,f).\qquad\square$$

COROLLAIRE 2.19. *Sous l'hypothèse de Hörmander, et si σ et p sont $\mathcal{C}^\infty(D)$, $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est l'unique forme de Dirichlet extension de $(\mathcal{E}^c,\mathcal{D}(\mathcal{E}^c))$.*

3. La construction des approximations

On veut ici approcher la forme non-régulière $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ par une suite $(\mathcal{E}^n,\mathcal{D}(\mathcal{E}^n))_n$ de formes de Dirichlet régulières. On montrera à la section suivante la convergence des lois associées Q^n vers la loi Q^s associée à $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$. L'idée est d'approcher la probabilité réversible μ du processus réfléchi qu'on veut construire par une suite de probabilités $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On fait en sorte que les processus réversibles de matrice de diffusion σ et de marginales μ_n n'atteignent pas le bord de D en temps fini.

3.1. $(\mu_n)_n$, SUITE D'APPROXIMATIONS DE μ

On définit la fonction ρ_n par

$$\forall x\in D\quad\rho_n(x)=\exp\left(-\exp\left(\frac{1}{n\delta(x)}\right)\right),$$

et on la prolonge par 0 hors de D.ρ_n est $\mathcal{C}^\infty$ bornée avec toutes ses dérivées bornées sur $\mathbb{R}^d$ (i.e. $\rho_n\in\mathcal{C}^\infty_b(\mathbb{R}^d)$) et $\rho_n(x)$ tend en croissant vers $1/e$ quand $n\to+\infty$ pour tout x de D. Cette croissance des ρ_n est très importante pour la suite. En particulier, si on pose $\gamma_m=[\int_D\rho_n p\,\mathrm{d}x]^{-1}$, la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en décroissant vers $\gamma_\infty=e$ quand $n\to+\infty$.

On note μ_n la probabilité sur D définie par $\mathrm{d}\mu_n(x) = \gamma_n \rho_n(x) p(x)\,\mathrm{d}x$. La suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en variation vers μ.

3.2. LA FORME DE DIRICHLET APPROCHÉE $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$

On définit $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ à partir de μ_n comme $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ à partir de μ

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{E}^n) = H(D, \mu_n, a\mu_n) \\ \qquad\qquad = \{f \in L^2(D, \mu_n) / \sigma\nabla f \in L^2(D, \mu_n)\}, \\ \forall f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^n) \quad \mathcal{E}^n(f, g) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_D \sigma\nabla f.\sigma\nabla g\,\mathrm{d}\mu_n. \end{cases}$$

PROPOSITION 3.1. *La forme $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ est une forme de Dirichlet régulière et locale.*

Preuve. Comme μ_n vérifie l'hypothèse (HSP), les résultats des parties 2.1 et 2.3 prouvent que $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ est une forme de Dirichlet. Elle est locale par construction. En appliquant la Proposition 2.14 avec

$$\alpha(x) = \|\nabla\delta\|_\infty^2 \|a\|_\infty \|p\|_\infty \gamma_n \exp\left(-\exp\left(\frac{1}{nx}\right)\right),$$

on voit qu'elle est également régulière. □

On note $(T_t^n)_{t>0}, (R_\alpha^n)_{\alpha>0}$ et $(A^n, \mathcal{D}(A^n))$ le semi-groupe, la résolvante et le générateur associés à $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$. La Proposition 3.1 et le Théorème 7.2.2 de [15] impliquent que $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ a une diffusion associée. On note $(Q^{n,x})_{x\in D\cup\{\Delta\}}$ (où Δ désigne un point cimetière) la famille des lois de cette diffusion, définie a priori sur $\mathcal{C}([0, +\infty[, D \cup \{\Delta\})$ muni de sa tribu borélienne et de la filtration (régularisée à droite et complétée) donnée par son processus canonique X. Mais comme la fonction $\mathbb{1}_D$ appartient à $\mathcal{D}(\mathcal{E}^n)$ et vérifie $\mathcal{E}^n(\mathbb{1}_D, \mathbb{1}_D) = 0$, le Théorème 1.6.3 et le Lemme 1.6.5 de [15] assurent que $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ est conservative, au sens où $\forall t > 0\, T_t^n \mathbb{1}_D = \mathbb{1}_D$. Donc (cf [15] Prob. 4.5.1) le temps d'atteinte de Δ par la diffusion est p.s. infini pour tout point initial dans D, i.e. $\forall x \in D\, Q^{n,x}(X_t \in D \forall t \in [0, +\infty[) = 1$, et on peut considérer $(Q^{n,x})_{x\in D}$ comme étant défini sur $\mathcal{C}([0, +\infty[, D)$. On notera $Q^n = \int_D Q^{n,x}\,\mathrm{d}\mu_n(x)$ la loi μ_n-réversible sur $\mathcal{C}([0, +\infty[, D)$ associée à $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$.

3.3. DÉCOMPOSITION EN SEMI-MARTINGALE SOUS Q^n

Puisque Q^n est associée à $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$, intuitivement elle doit avoir pour matrice de diffusion σ et pour drift $\nabla.(a\gamma_n\rho_n p)/2\gamma_n\rho_n p$. Fixons $T > 0$ quelconque. On va résoudre sur $[0, T]$ l'équation

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t \left(\frac{\nabla.(a\rho_n p)}{2\rho_n p}\right)(X_s)\,\mathrm{d}s \tag{En}$$

avec la loi initiale μ_n et vérifier qu'elle a une unique solution, qui est égale à $Q^n_{|[0,T]}$.

On cherche une solution faible, c'est-à-dire une loi sur $(\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d),(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]})$ sous laquelle

$$X_\cdot - X_0 - \int_0^\cdot \left(\frac{\nabla.(a\rho_n p)}{2\rho_n p}\right)(X_s)\,\mathrm{d}s$$

est une martingale L^2 de processus croissant $\int_0^\cdot a(X_s)\,\mathrm{d}s$ (en notant $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ la filtration, régularisée à droite et complétée, engendrée par le processus canonique X sur $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$. A cause de la croissance rapide de $(\nabla\rho_n/\rho_n)(x)$ au bord de D, cette équation ne vérifie pas les hypothèses des théorèmes classiques. Pour montrer l'existence d'une loi solution, on utilisera un théorème 'à la Girsanov' de [8]. Réécrivons (En) sous la forme

$$\begin{aligned} X_t \;=\; & X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t \left(\frac{\nabla.a}{2}\right)(X_s)\,\mathrm{d}s \\ & + \int_0^t \left(a.\frac{\nabla(\rho_n p)}{2\rho_n p}\right)(X_s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Les fonctions σ et $\nabla.a$ sont bornées lipschitziennes sur $\mathbb{R}^d$ donc l'équation

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t \left(\frac{\nabla.a}{2}\right)(X_s)\,\mathrm{d}s \tag{E}$$

a une unique solution trajectorielle pour chaque loi initiale ν vérifiant $\int_{\mathbb{R}^d}\|x\|^2\,\mathrm{d}\nu(x) < +\infty$. On note P^x la loi de la solution correspondant à $\nu=\delta_x$ pour $x\in\mathbb{R}^d$, et P^n la loi de la solution correspondant à $\nu=\mu_n$ (On suppose ici que tous les μ_n sont de variance finie, par exemple que p est de variance finie ou que D est borné). La famille $(P^x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ est fortement markovienne et vérifie $P^n = \int_{\mathbb{R}^d} P^x\,\mathrm{d}\mu_n(x)$. De plus, $(P^x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ est l'unique solution du problème de martingale associé à l'opérateur

$$\left(A = \frac{1}{2}\sum_{ij} a_{ij}\partial_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{ij}(\partial_j a_{ij})\partial_i, \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)\right).$$

Définissons

$$b_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \text{ par } b_n = \frac{\nabla(\rho_n p)}{2\rho_n p} = \frac{1}{2}\left(\frac{\nabla\rho_n}{\rho_n} + \frac{\nabla p}{p}\right),$$

où $\nabla p/p$ et $\nabla/\rho_n/\rho_n$ sont prolongées par 0 hors de D. Le Théorème 4.29 de [8] assure alors que

THÉORÈME 3.2. (i) *Le processus*

$$Z_t^n = \exp\left(\int_0^t b_n(X_s)\,\mathrm{d}M_s - \frac{1}{2}\int_0^t (b_n.ab_n)(X_s)\,\mathrm{d}s\right),$$

où $M_s = X_s - X_0 - \int_0^t (\nabla.a/2)(X_s)\,\mathrm{d}s$ *est bien défini pour* $t \in [0,T]$ *et est une* $(\mathcal{F}_t)_t$*-martingale.*

(ii) *La probabilité* $\mathcal{Q}^n$ *sur* $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$ *définie par* $(\mathrm{d}\mathcal{Q}^n/\mathrm{d}P^n)|_{\mathcal{F}_t} = Z_t^n$ *a pour marginale* μ_n *à chaque instant* $t \in [0,T]$ *(i.e. la* $\mathcal{Q}^n$*-loi de* X_t *est égale à* μ_n*).*

(iii) $\mathcal{Q}^n$ *est solution en loi de l'équation* (En) *avec la loi initiale* μ_n.

Preuve. La condition d'énergie finie, i.e. $\int_{\mathbb{R}^d}(b_n.ab_n)\,\mathrm{d}\mu_n(x) < +\infty$, est vérifiée car a, p et $\nabla\delta$ sont bornées sur D. L'équation de Fokker–Planck faible

$$\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \quad \forall 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x,t)\,\mathrm{d}\mu_n(x) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x,s)\,\mathrm{d}\mu_n(x)$$
$$= \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_u f + Af + \nabla f.ab_n)(x,u)\,\mathrm{d}\mu_n(x)\,\mathrm{d}u$$

est également vérifiée. Il suffit pour le voir d'intégrer par parties en remarquant que $a\rho_n p$ peut être prolongée en une fonction $\mathcal{C}^1$ sure $\mathbb{R}^d$ (puisque ρ_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^d$ et nulle hors de D). Enfin, puisque P^n est markovienne et Z^n multiplicative, $\mathcal{Q}^n$ est markovienne (cf [24] Thm. 24.36) et donc, au vu de [8] Proposition 4.6, $\mathcal{Q}^n$ est solution en loi de (En). □

REMARQUE 3.3. La preuve précédente montre en fait que pour toute fonction f de $\mathcal{C}_c^\infty(D)$,

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \tfrac{1}{2}(\nabla.a\nabla f)(X_s)\,\mathrm{d}s$$
$$- \int_0^t \left(\nabla f.a\frac{\nabla(\rho_n p)}{2\rho_n p}\right)(X_s)\,\mathrm{d}s$$

est une $\mathcal{Q}^n$-martingale de carré intégrable.

Le résultat suivant prouve que Q^n est égale à $\mathcal{Q}^n$ sur $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$ et donne donc une décomposition en semi-martingale de X sous Q^n.

THÉORÈME 3.4. *Pour tout* $t > 0, Q^n$ *vérifie*

$$X_t = X_0 + N_t^n + \int_0^t \left(\frac{\nabla.(a\rho_n p)}{2\rho_n p}\right)(X_s)\,\mathrm{d}s \quad \forall t \in [0,T]\ Q^n\text{-p.s.},$$

où N^n est une Q^n-martingale L^2 de processus croissant $\int_0^{\cdot} a(X_s)\,\mathrm{d}s$.

De plus $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ est l'unique extension markovienne fermée de $(\frac{1}{2}\int_D \nabla f.a\nabla f\,\mathrm{d}\mu_n, \mathcal{C}_c^\infty(D))$.

Preuve. De la relation $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)T_t^n|_{t=t_0} = A^n T_{t_0}^n = T_{t_0}^n A^n$ dans $L^2(D, \mu_n)$, on déduit que pour toute $f \in \mathcal{C}_c^\infty(D)$ et toute h bornée sur D

$$E^{Q^n}\left(\left[f(X_t) - f(X_s) - \int_s^t A^n f(X_u)\,\mathrm{d}u\right] h(X_s)\right)$$

$$= \int_D \left[T_{t-s}^n f - f - \int_0^{t-s} T_u^n A^n f\,\mathrm{d}u\right] h\,\mathrm{d}\mu_n = 0,$$

donc que $f(X_t) - f(X_s) - \int_s^t A^n f(X_u)\,\mathrm{d}u$ est une martingale sous Q^n.

En intégrant par parties, on voit que le générateur A^n de $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ est égal à $\nabla.(a\rho_n p\nabla)/2\rho_n p$ sur $\mathcal{C}_c^\infty(D)$, donc le processus

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \left(\frac{\nabla.(a\rho_n p\nabla f)}{2\rho_n p}\right)(X_s)\,\mathrm{d}s$$

est une martingale L^2 sous Q^n de processus croissant $\int_0^{\cdot}(\nabla f.a\nabla f)(X_s)\,\mathrm{d}s$.

La Remarque 3.3 assure que $\mathcal{Q}^n$ est solution du même problème de martingales. Or, comme on peut prolonger $\nabla.(a\rho_n p)/2\rho_n p$ en une fonction $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^d)$, ce problème de martingale a une unique solution trajectorielle jusqu'au temps de sortie de tout compact de D. En considérant une suite croissante de compacts tendant vers D, on voit que $\mathcal{Q}^n$ et Q^n coïncident jusqu'au temps de sortie τ_D de D, et que $\mathcal{Q}^n(\tau_D \leqslant T) = Q^n(\tau_D \leqslant T)$. Puisqu'on sait que $Q^n(\tau_D < +\infty) = 0$, ceci prouve que $\mathcal{Q}^n$ et Q^n sont égales sur $[0, T]$.

La même démonstration montre que la famille de probabilités associée à toute extension markovienne fermée de $(\frac{1}{2}\int_D \nabla f.a\nabla f\,\mathrm{d}\mu_n, \mathcal{C}_c^\infty(D))$ est égale à $(Q^{n,x})_x$ donc que $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ est l'unique extension markovienne fermée de $(\frac{1}{2}\int_D \nabla f.a\nabla f\,\mathrm{d}\mu_n, \mathcal{C}_c^\infty(D))$. □

REMARQUE 3.5. La proposition précédente assure, entre autres, que le temps d'atteinte de ∂D sous $\mathcal{Q}^n$ est infini. On peut obtenir directement ce résultat par une méthode probabiliste. Voir par exemple la preuve du Théorème 5.1 de [23] (step 3), ou celle de la Proposition 2.3.4 de [12].

REMARQUE 3.6. On peut également calculer la décomposition en semi-martingale sous Q^n en n'utilisant pas [8], mais [15]: $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ étant fortement locale et les fonctions coordonnées $x \to x^i$ sur D étant localement dans $\mathcal{D}(\mathcal{E}^n)$, le Théorème 5.5.1 de [15] assure que les fonctionnelles additives $X_{\cdot}^i - X_0^i$ se décomposent de façon unique en la somme d'une fonctionnelle additive martingale locale M^i et d'une fonctionnelle additive continue locale d'énergie nulle N^i. En utilisant [15] Théorème 5.5.2, on calcule la mesure régulière associée à $\langle M^i\rangle$. Cette mesure est a_{ii}

$\mathrm{d}\mu_n$, donc $\langle M^i \rangle = \int_0^{\cdot} a_{ii}(X_s)\,\mathrm{d}s$. Puis, grâce aux Corollaires 5.5.1 et 5.4.1 de [15], on calcule la mesure (signée) associée à N^i: elle est égale à $(\nabla.(a\rho_n p)/2\rho_n p)^1\,\mathrm{d}\mu_n$, ce qui prouve que N^i est égal à $\int_0^{\cdot}(\nabla.(a\rho_n p)/2\rho_n p)^i(X_s)\,\mathrm{d}s$ (cf la Sect. 6 où on utilise une méthode de ce type).

4. La convergence des approximations

Notre but est de montrer que la suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge étroitement vers une probabilité Q^s sur $\mathcal{C}([0,T],\overline{D})$ associée à la forme de Dirichlet $(\mathcal{E}^s,\mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ sur $L^2(D,\mu)$.

On montre d'abord la tension de la suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathcal{C}([0,T],\overline{D})$. On en déduit la convergence faible dans $L^2(D,\mu)$ d'une sous-suite de $(T_t^n f)_n$ pour chaque $f\in\mathcal{C}_b(D)$.

La croissance de la suite $(\rho_n)_n$, qui assure que les domaines $\mathcal{D}(\mathcal{E}^n)$ sont emboîtés de façon décroissante, permet de montrer que '$\mathcal{E}^s(,) = e\ \sup_n(1/\gamma_n)\mathcal{E}^n(,)$'. De cette convergence des $(\mathcal{E}^n,\mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ et de la convergence faible de $(T_t^n f)_n$, on déduit la convergence forte dans $L^2(D,\mu)$ des résolvantes $(R_\alpha^n f)_n$ vers $R_\alpha^s f$, puis la convergence forte dans $L^2(D,\mu)$ de $(T_t^n f)_n$ vers $T_t^s f$. Ceci assure que la suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une unique valeur d'adhérence, donc qu'elle est convergente, et que sa limite est markovienne de semi-groupe T^s.

4.1. LA TENSION DE $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

PROPOSITION 4.1. *Pour chaque $T>0$, la suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite tendue de probabilités sur $\mathcal{C}([0,T],\overline{D})$ et chacune de ses valeurs d'adhérences $Q^{\text{v.a.}}$ est réversible de mesure μ.*

Preuve. On pose $\overline{X}_t = X_{T-t}$

$$N_t^n = X_t - X_0 - \int_0^t \left(\frac{\nabla.(a\rho_n p)}{2\rho_n p}\right)(X_s)\mathrm{d}s \quad \text{et}$$

$$\overline{N}_t^n = \overline{X}_t - \overline{X}_0 - \int_0^t \left(\frac{\nabla.(a\rho_n p)}{2\rho_n p}\right)(\overline{X}_s)\,\mathrm{d}s.$$

Un calcul rapide donne $X_t = X_0 + \frac{1}{2}(N_t^n + \overline{N}_{T-t}^n - \overline{N}_T^n)$. Pour montrer que $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est tendue, il suffit donc de montrer que la suite des lois de $(X_0, N^n, \overline{N}^n)$ sous Q^n est tendue.

La suite des lois de X_0 sous Q^n est $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui est tendue car elle converge en variation vers μ. Comme N^n est une Q^n-martingale de carré intégrable pour chaque n, d'après le Théorème 6.4.13 de [18], la suite des lois de N^n sous Q^n est tendue dès que celle des lois de

$$\sum_i \left\langle (N^n)^i \right\rangle = \sum_i \int_0^{\cdot} a_{ii}(X_s)\,\mathrm{d}s$$

sous (Q^n) l'est. On utilise le Théorème 8.2 de [5]

- $t \to \int_0^t \sum_i a_{ii}(X_s)\,\mathrm{d}s$ est continue Q^n-p.s. car a est bornée.
- $\sum_i \langle (N^n)^i \rangle_0 = 0$.
- $\forall \eta, \varepsilon > 0 \exists \delta \in]0,1[\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$
$$\forall n \leqslant n_0 \quad Q^n \left(\sup_{|t-s|<\delta} \left| \int_s^t \sum_i a_{ii}(X_u)\,\mathrm{d}u \right| \geqslant \varepsilon \right) < \eta,$$
(il suffit de prendre $\delta = \varepsilon / \|a\|_\infty$).

Donc la suite des lois de $\int_0^t \sum_i a_{ii}(X_s)\,\mathrm{d}s$ sous Q^n est tendue et celle des lois de N^n aussi.

Puisque Q^n est réversible, $\overline{N}^n$ est une Q^n-martingale pour la filtration rétrograde de processus croissant $\int_0^\cdot a(\overline{X}_s)\,\mathrm{d}s$, donc le même raisonnement assure que la suite des lois de $\overline{N}^n$ sous Q^n est tendue.

Un produit d'ensembles relativement compacts étant relativement compact, la suite des lois de $(X_0, N^n, \overline{N}^n)$ sous (Q^n) est tendue, donc $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'est.

Si $Q^{\text{v.a.}}$ est la limite d'une sous-suite $(Q^{n(k)})_k$ de $(Q^n)_n$, la continuité de la projection $\pi_t : x \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d) \to x_t \in \mathbb{R}^d$ implique que $Q^{\text{v.a.}} \circ \pi_t^{-1} = \lim_{k\to+\infty} Q^{n(k)} \circ \pi_t^{-1} = \lim_{k\to+\infty} \mu_{n(k)} = \mu$ donc $Q^{\text{v.a.}}$ est μ-stationnaire.

De même, la continuité des $\pi_{t_1,\dots,t_j} : x \to (x_{t_1},\dots,x_{t_j})$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et tout $t_1,\dots,t_j \in [0,T]^j$, jointe à la réversibilité de Q^n, entraîne que $Q^{\text{v.a.}}$ est réversible. □

COROLLAIRE 4.2. *Puisque la suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est tendue sur $\mathcal{C}([0,T],\overline{D})$ pour tout $T > 0$, elle est relativement compacte sur $\mathcal{C}([0,T],\overline{D})$ pour tout $T > 0$, donc relativement compacte sur $\mathcal{C}([0,+\infty[,\overline{D})$.*

4.2. CONVERGENCE DES $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ VERS $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$

Pour chaque x de D, $(\rho_n(x))_n$ est une suite croissante, donc la suite des $L^2(D,\mu_n)$ est décroissante.

Si $m \leqslant n$ et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(D)$
$$\frac{1}{\gamma_m} \int_D \nabla f . a \nabla f \,\mathrm{d}\mu_m \leqslant \frac{1}{\gamma_n} \int_D \nabla f . a \nabla f \,\mathrm{d}\mu_n,$$
donc pour $\alpha \geqslant 0$ on a
$$\frac{1}{\gamma_m} \mathcal{E}_\alpha^m(f,f) \leqslant \frac{1}{\gamma_n} \mathcal{E}_\alpha^n(f,f) \quad \text{où } \mathcal{E}_\alpha^n(f,f) = \mathcal{E}^n(f,f) + \alpha \|f\|^2_{L^2(D,\mu_n)}.$$

Si $m \leqslant n$ et $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^n)$

Comme $f \in L^2(D,\mu_n)$, $f \in L^2(D,\mu_m)$ et f est limite pour la norme $\sqrt{\mathcal{E}_1^n}$ d'une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(D)$. D'après l'inégalité précédente, f est aussi limite pour la norme $\sqrt{\mathcal{E}_1^m}$ de la même suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, donc $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^m)$.

Par conséquent, si $m \leqslant n$, on a

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}^n) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}^m) \text{ et } \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^n) \quad \frac{1}{\gamma_m}\mathcal{E}^m(f,f) \leqslant \frac{1}{\gamma_n}\mathcal{E}^n(f,f).$$

Ceci permet de montrer que

PROPOSITION 4.3. *$(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est la limite des $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ en le sens suivant*

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{E}^s) = \left\{ f \in L^2(D,\mu) \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \searrow \mathcal{D}(\mathcal{E}^n) \Big/ \sup_n \frac{1}{\gamma_n}\mathcal{E}^n(f,f) < +\infty \right\}, \\ \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s) \quad \mathcal{E}^s(f,f) = e \sup_n \frac{1}{\gamma_n}\mathcal{E}^n(f,f) = e \lim_{n \to +\infty} \nearrow \frac{1}{\gamma_n}\mathcal{E}^n(f,f). \end{cases}$$

Preuve. La croissance p.s. des ρ_n vers $(1/e)$ et le théorème de Beppo–Levi permettent d'écrire que

$$\frac{1}{e}\int_D |\sigma\nabla f|^2 \,\mathrm{d}\mu = \int_D |\sigma\nabla f|^2 \left(\sup_n \rho_n\right) p \,\mathrm{d}x = \sup_n \int_D |\sigma\nabla f|^2 \,\mathrm{d}\mu_n,$$

d'où le résultat énoncé. □

4.3. CONVERGENCE DES Q^n VERS Q^s

Le but de cette section, inspirée de [10], est de démontrer que la suite $(Q^n)_n$ approxime bien Q^s. Plus exactement

PROPOSITION 4.4. *La suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge étroitement vers la probabilité Q^s associée à $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$.*

Pour démontrer ce résultat, on va étudier toutes les valeurs d'adhérences de la suite relativement compacte $(Q^n)_n$ et constater qu'elles sont égales. On choisit une de ces valeurs d'adhérences et on la note $Q^{\text{v.a.}}$. Pour simplifier les notations, on appelle encore $(Q^n)_n$ la sous-suite qui converge vers $Q^{\text{v.a.}}$ et $(T^n)_n, (R^n)_n$ les sous-suites de semi-groupes et de résolvantes correspondantes. Établissons d'abord les lemmes suivants, dans lesquels f désigne une fonction bornée sur D fixée.

LEMME 4.5. *$\forall t \in \mathbb{R}^+$ $T_t^n f \xrightarrow[n\to+\infty]{} T_t^{\text{v.a.}} f$ faiblement dans $L^2(D,\mu)$, où $T_t^{\text{v.a.}} f(x) = E^{Q^{\text{v.a.}}}(f(X_t)|X_0 = x)$ est définie μ-p.s. (car $Q^{\text{v.a}}$ est μ-stationnaire, cf Prop. 4.1).*

Preuve. Tout d'abord, si $f \in \mathcal{C}_b(D)$, la convergence en variations de μ_n vers μ et la convergence étroite de Q^n vers $Q^{\text{v.a.}}$ impliquent que pour $t \in \mathbb{R}^+$ et $g \in \mathcal{C}_b(D)$

$$\left| \int_D g T_t^n f \,\mathrm{d}\mu - \int_D g T_t^{\text{v.a.}} f \,\mathrm{d}\mu \right|$$

$$\leqslant \left| \int_D gT_t^n f \,\mathrm{d}(\mu - \mu_n) + E^{Q^n}(g(X_0)f(X_t)) - E^{Q^{\text{v.a.}}}(g(X_0)f(X_t)) \right|$$

$$\leqslant \|g\|_\infty \|f\|_\infty \int_D \mathrm{d}|\mu_n - \mu|$$

$$+|E^{Q^n}(g(X_0)f(X_t)) - E^{Q^{\text{v.a.}}}(g(X_0)f(X_t))| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'autre part, si f est bornée (continue ou non), on peut trouver une suite $(f_k)_k$ de fonctions $\mathcal{C}_b(D)$ uniformément bornées par $\|f\|_\infty$ telle que $(f_k)_k$ converge dans $L^2(D,\mu)$ vers f. Pour $t \in \mathbb{R}^+$ et $g \in \mathcal{C}_b(D)$

$$\left| \int_D gT_t^n f \,\mathrm{d}\mu - \int_D gT_t^{\text{v.a.}} f \,\mathrm{d}\mu \right|$$

$$\leqslant \left| \int_D gT_t^n (f - f_k) \,\mathrm{d}\mu \right| + \left| \int_D gT_t^{\text{v.a.}} (f - f_k) \,\mathrm{d}\mu \right|$$

$$+ \left| \int_D g(T_k^n f_k - T_t^{\text{v.a.}} f_k) \,\mathrm{d}\mu \right|.$$

Le premier terme du membre de droite peut être majoré par

$$\|g\|_\infty (2\|f\|_\infty) \int_D \mathrm{d}|\mu_n - \mu| + \|g\|_\infty \frac{\gamma_1}{e} \|f - f_k\|_{L^2(D,\mu)}$$

et le second par $\|g\|_\infty \|f - f_k\|_{L^2(D,\mu)}$ donc on peut trouver un k assez grand, puis un n assez grand dépendant de k, pour que

$$\left| \int_D gT_t^n f \,\mathrm{d}\mu - \int_D gT_t^{\text{v.a.}} f \,\mathrm{d}\mu \right|$$

soit aussi petit qu'on veut.

Le résultat s'en déduit par densité de $\mathcal{C}_b(D)$ dans $L^2(D,\mu)$. □

LEMME 4.6. $\forall \alpha > 0$ $R_\alpha^n f$ *converge faiblement dans* $L^2(D,\mu)$.

Preuve.

$$\forall g \in L^2(D,\mu) \quad \int_D gR_\alpha^n f \,\mathrm{d}\mu = \int_D g \int_0^{+\infty} T_t^n f e^{-\alpha t} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}\mu$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \int_D gT_t^n f \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}t,$$

et puisque $T_t^n f$ converge faiblement dans $L^2(D,\mu)$ vers $T_t^{\text{v.a.}} f$

$$\forall g \in L^2(D,\mu) \quad \int_D gR_\alpha^n f \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \int_D gT_t^{\text{v.a.}} f \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}t.$$

De plus, comme l'opérateur

$$g \to \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \int_D g T_t^{\text{v.a.}} f \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t$$

est linéaire continu sur $L^2(D,\mu)$, le théorème de représentation de Riesz assure que

$$\exists! R_\alpha^{\text{v.a.}} f \in L^2(D,\mu) / \forall g \in L^2(D,\mu)$$

$$\int_D g R_\alpha^{\text{v.a.}} f \,\mathrm{d}\mu = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \int_D g T_t^{\text{v.a.}} f \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t,$$

et $\|R_\alpha^{\text{v.a.}} f\|_{L^2(D,\mu)} \leqslant (1/\alpha)\|f\|_{L^2(D,\mu)}$. On a alors

$$R_\alpha^n f \xrightarrow[n\to+\infty]{} R_\alpha^{\text{v.a.}} f \text{ faiblement dans } L^2(D,\mu). \qquad \square$$

LEMME 4.7. $\forall \alpha > 0$ *la limite de* $(R_\alpha^n f)_n$ *dans* $L^2(D,\mu)$ *est* $R_\alpha^s f$.

Preuve. Montrons d'abord que $R_\alpha^{\text{v.a.}} f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s)$. Si $j \leqslant k \leqslant l \in \mathbb{N}^*$: $R_\alpha^k f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^k) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}^j)$ et $R_\alpha^l f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^l) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}^j)$ donc

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_\alpha^j(R_\alpha^l f - R_\alpha^k f, R_\alpha^l f - R_\alpha^k f)\\
&\quad\leqslant \frac{\gamma_j}{\gamma_k}\big(\mathcal{E}_\alpha^k(R_\alpha^l f, R_\alpha^l f) - 2\mathcal{E}_\alpha^k(R_\alpha^l f, R_\alpha^k f) + \mathcal{E}_\alpha^k(R_\alpha^k f, R_\alpha^k f)\big)\\
&\quad\leqslant \frac{\gamma_j}{\gamma_l}(f, R_\alpha^l f,)_{L^2(D,\mu_l)} - 2\frac{\gamma_j}{\gamma_k}(f, R_\alpha^l f,)_{L^2(D,\mu_k)} + \frac{\gamma_j}{\gamma_k}(f, R_\alpha^k f,)_{L^2(D,\mu_k)}\\
&\quad\leqslant \frac{\gamma_j}{e}\big((f, R_\alpha^l f,)_{L^2(D,\mu)} - 2(f, R_\alpha^l f,)_{L^2(D,\mu)} + (f, R_\alpha^k f,)_{L^2(D,\mu)}\big)\\
&\qquad + \frac{1}{\alpha}\frac{\gamma_j}{e}\|f\|_\infty^2\|\mu - \mu_l\|_{\text{var}} + 3\frac{1}{\alpha}\frac{\gamma_j}{e}\|f\|_\infty^2\|\mu - \mu_k\|_{\text{var}}\\
&\qquad \xrightarrow[k,l\to+\infty]{} 0 \text{ d'après le Lemme 4.6,}
\end{aligned}$$

donc $(R_\alpha^k f)_k$ est une suite de Cauchy dans le Hilbert $(\mathcal{D}(\mathcal{E}^j), \sqrt{\mathcal{E}_\alpha^j})$. Elle converge donc dans $\mathcal{D}(\mathcal{E}^j)$ vers sa limite faible $R_\alpha^{\text{v.a.}} f$.

On en déduit que $R_\alpha^{\text{v.a.}} f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\alpha^j(R_\alpha^{\text{v.a.}} f, R_\alpha^{\text{v.a.}} f) &\leqslant \liminf_{k\to+\infty} \frac{\gamma_j}{\gamma_k}(f, R_\alpha^k f,)_{L^2(D,\mu_k)}\\
&\leqslant \frac{\gamma_1}{e}(f, R_\alpha^{\text{v.a.}} f,)_{L^2(D,\mu)} \leqslant \frac{\gamma_1}{e}\frac{1}{\alpha}\|f^2\|_{L^2(D,\mu)}.
\end{aligned}$$

D'où $R_\alpha^{\text{v.a.}} f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s)$ et $\mathcal{E}_\alpha^s(R_\alpha^{\text{v.a.}} f, R_\alpha^{\text{v.a.}} f) \leqslant (\gamma_1/e)(1/\alpha)\|f^2\|_{L^2(D,\mu)}$.

Montrons maintenant que $R_\alpha^{\text{v.a.}} f = R_\alpha^s f$.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_\alpha^j(R_\alpha^j f - R_\alpha^{\text{v.a.}} f, R_\alpha^j f - R_\alpha^{\text{v.a.}} f)\\
&\quad\leqslant (f, R_\alpha^j f,)_{L^2(D,\mu_j)} - 2(f, R_\alpha^{\text{v.a.}} f,)_{L^2(D,\mu_j)}\\
&\qquad + \liminf_{k\to+\infty} \frac{\gamma_j}{\gamma_k} \mathcal{E}_\alpha^k(R_\alpha^k f, R_\alpha^k f)\\
&\quad\leqslant (f, R_\alpha^j f,)_{L^2(D,\mu)} - 2(f, R_\alpha^{\text{v.a.}} f,)_{L^2(D,\mu)}\\
&\qquad + 3\|f\|_\infty^2 \|\mu - \mu_j\|_{\text{var}}\\
&\qquad + \frac{\gamma_j}{e} \liminf_{k\to+\infty} \left[(f, R_\alpha^k f,)_{L^2(D,\mu)} + \frac{1}{\alpha}\|f\|_\infty^2 \|\mu - \mu_k\|_{\text{var}}\right]\\
&\qquad \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0,
\end{aligned}$$

d'où on déduit que si $g \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\alpha^s(R_\alpha^{\text{v.a.}} f, g) &= \lim_{j\to+\infty} \mathcal{E}_\alpha^j(R_\alpha^{\text{v.a.}} f, g)\\
&= \lim_{j\to+\infty} \mathcal{E}_\alpha^j(R_\alpha^j f, g)\\
&= \lim_{j\to+\infty} (f, g)_{L^2(D,\mu_j)} = (f, g)_{L^2(D,\mu)},
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $R_\alpha^{\text{v.a.}} f = R_\alpha^s f$. □

LEMME 4.8. *Pour* dt*-presque tout* t *de* $[0,T] T_f^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} T_t^s f$ *fortement dans* $L^2(D,\mu)$.

Preuve. On appelle $\mathcal{L}$ une partie dénombrable dense de $L^2(D,\mu)$. D'après le lemme précédent, on a

$$\forall \alpha > 0\ \forall g \in \mathcal{L}$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \int_D g T_t^{\text{v.a}} f \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \int_D g T_t^s f \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t,$$

donc pour chaque fonction g de $\mathcal{L}$ on peut trouver un borélien de mesure de Lebesgue $2T$ dans $[0,2T]$ tel que si t appartient à ce borélien $\int_D g T_t^{\text{v.a.}} f \,\mathrm{d}\mu = \int_D g T_t^s f \,\mathrm{d}\mu$. L'intersection $\mathcal{H}'_f$ de ces boréliens est encore de mesure de Lebesgue $2T$ dans $[0,2T]$ et vérifie

$$\forall t \in \mathcal{H}'_f\ \forall g \in \mathcal{L} \quad (g, T_t^{\text{v.a.}} f,)_{L^2(D,\mu)} = (g, T_t^s f,)_{L^2(D,\mu)},$$

donc $\forall t \in \mathcal{H}'_f$ $T_t^{\text{v.a.}} f = T_t^s f \mu$-p.s.

On note $\mathcal{H}_f = \mathcal{H}'_f \cap \frac{1}{2}\mathcal{H}'_f$. Grâce au Lemme 4.5, pour t dans $\mathcal{H}_f$ on a

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\int_D (T_t^n f)^2\,\mathrm{d}\mu\\&\quad=\lim_{n\to+\infty}\int_D fT_{2t}^n f\,\mathrm{d}\mu=\int_D fT_{2t}^s f\,\mathrm{d}\mu=\int_D (T_t^s f)^2\,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

donc $T_t^n f$ converge fortement dans $L^2(D,\mu)$ vers $T_t^s f$ pour t dans $\mathcal{H}_f$. □

Quitte à remplacer $\mathcal{H}_f$, dans la preuve qui précède, par l'intersection des $\mathcal{H}_g$ pour g dans une partie dénombrable dense de $L^\infty(D,\mu)$, on peut considérer que $\mathcal{H}_f$ est indépendant de f. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la Proposition 4.4.

Preuve. On note $\mathcal{H}$ le complémentaire d'un négligeable de $[0,T]$ qui vérifie

$$\forall t\in\mathcal{H}\ \forall f\in\mathcal{C}_b(D)\quad T_t^n f \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2(D,\mu)} T_t^s f.$$

On fixe $0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_k\leqslant T$ et $f_1,f_2,\ldots,f_k\in\mathcal{C}_b(\mathcal{D})$ et on note $s_i=t_{i+1}-t_i$. Si tous les s_i appartiennent à $\mathcal{H}$, la convergence forte L^2 des $T_{s_i}^n f$ vers les $T_{s_i}^s f$ implique que

$$\begin{aligned}&E^{Q^{\text{v.a.}}}\big(f_1(X_{t_1})f_2(X_{t_2})\cdots f_k(X_{t_k})\big)\\&\quad=\int_D f_1T_{s_1}^s\big(f_2T_{s_2}^s(\cdots f_{k_1}T_{s_{k-1}}^s(f_k))\cdots\big)\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Si les s_i ne sont pas éléments de $\mathcal{H}$, ils sont limites d'une suite d'éléments de $\mathcal{H}$. Comme X est p.s. continu sous $Q^{\text{v.a.}}$, comme les f_i sont continues bornées sur D, et comme $(T_t^s)_t$ est fortement continu, l'égalité précédente est encore vraie.

Donc $Q^{\text{v.a.}}=Q^s$, et puisque toutes les valeurs d'adhérence $Q^{\text{v.a.}}$ de la suite $(Q^n)_n$ sont égales à Q^s, $(Q^n)_n$ est convergente de limite Q^s. □

REMARQUE 4.9. Il ne semble pas possible de démontrer de façon probabiliste la convergence de $(Q^n)_n$ vers Q^s. Dans [23], la démonstration de la convergence forte des semi-groupes associés aux $\mathcal{E}^n$ (pris en une fonction f et en un instant t) utilise le fait que les densités de transition des processus approximants convergent dans $L^2(D,\mu)$ vers celle du processus limite. Mais cette convergence des densités de transition découle de l'uniforme ellipticité de a sur tout compact de D. Une démarche semblable (ou l'utilisation de [21]) nous était interdite puisque nous n'avons pas supposé l'uniforme ellipticité locale de a.

5. Décomposition en semi-martingale sous Q^s

On suppose désormais qu'en plus de l'hypothèse (HSP), l'hypothèse suivante est vérifiée

$$\begin{array}{l}\text{(i) } a\frac{\nabla p}{p} \text{ est continue sur } \overline{D},\\ \text{(ii) } \forall m \in \mathbb{N}^* \quad \liminf_n \int_{D\cap B(0,m)} |\nabla \rho_n| \, \mathrm{d}\mu < +\infty,\end{array} \qquad \text{(HPW)}$$

où $B(0,m)$ désigne la boule de centre 0 et de rayon m.

REMARQUE 5.1. La condition (HPW) (ii) est à peine plus faible que la condition (62) qui apparaît dans l'énoncé du Théorème 6.1. de [23]. Dans la preuve de 6.1, la condition (62) n'est d'ailleurs utilisée que sous sa forme (HPW) (ii). Une condition suffisante pour que (HPW) (ii) soit vérifiée (cf [23] Rem. 6.2) est que la frontière de D soit de contenu de Minkowski ($d-1$)-dimensionnel supérieur dans D fini, i.e.

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \ \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{d}x(\{x \in D/\mathrm{d}(x, \partial D \cap B(0,m)) \leqslant \varepsilon\})}{\varepsilon} < +\infty.$$

Notre but est de montrer que sous ces hypothèses, Q^s est la loi d'une semi-martingale. Pour cela, nous allons suivre, en la modifiant quelque peu, la démarche de [23]. Nous travaillons sur la réalisation canonique des processus, ce qui allège certains points.

On se place sur l'espace $\Omega^{\mathbb{N}} = (\mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^d))^{\mathbb{N}}$ dont on note $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille des fonctions coordonnées. $\Omega^{\mathbb{N}}$ est muni de la filtration $(\mathcal{F}_t^{\mathbb{N}})_{t\in[0,1]}$ définie par $\mathcal{F}_t^{\mathbb{N}} = \sigma(X_u^n, n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u \leqslant t)$ et de la filtration rétrograde $\mathcal{G}_t^{\mathbb{N}} = \sigma(X_u^n, n \in \mathbb{N}, t \leqslant u \leqslant T)$ (régularisées à droite et complétées). On met sur $\Omega^{\mathbb{N}}$ la probabilité $Q = \bigotimes_{n=0}^{+\infty} Q^n$, de façon à ce que les $X^n(\omega) = \omega_n$ soient indépendantes et de loi Q^n sous Q.

Comme dans la démonstration de la Proposition 4.1, on définit les martingales

$$N_t^n = X_t^n - X_0^n - \int_0^t \left(\frac{\nabla.(a\rho_n p)}{2\rho_n p}\right)(X_s^n) \, \mathrm{d}s,$$

$$\overline{N}_t^n = X_{T-t}^n - X_T^n - \int_0^t \left(\frac{\nabla.(a\rho_n p)}{2\rho_n p}\right)(X_{T-s}^n) \, \mathrm{d}s,$$

de processus croissants $\int_0^{\cdot} a(X_s^n) \, \mathrm{d}s$ et $\int_0^{\cdot} a(X_{T-s}^n) \, \mathrm{d}s$. On sait alors que la suite $(X^n, X_0^n, N^n, \overline{N}^n)_n$ est tendue. Quitte à se restreindre à une sous-suite, qu'on note encore $(X^n, X_0^n, N^n, \overline{N}^n)_n$, on peut considérer qu'elle converge en loi vers une limite $(X^l, X_0^l, N^l, \overline{N}^l)$. On sait alors que X^l a pour loi Q^s sous Q. On note $(\mathcal{F}_t^l)_{t\in[0,T]}$ la filtration définie par $\mathcal{F}_t^l = \sigma(X_u^l, 0 \leqslant u \leqslant t)$ et $(\mathcal{G}_t^l)_{t\in[0,T]}$ la filtration rétrograde correspondante.

LEMME 5.2. *Sous* Q, N^l *est une* $(\mathcal{F}_t^l)_t$*-martingale* L^2 *continue de processus croissant* $\int_0^\cdot a(X_s^l)\,\mathrm{d}s$. *De même,* $\overline{N}^l$ *est une* $(\mathcal{G}_t^l)_t$*-martingale* L^2 *continue de processus croissant* $\int_0^\cdot a(X_{1-s}^l)\,\mathrm{d}s$.

Preuve. $(N_{t\wedge T}^n)_{t\in[0,+\infty]}$ est une suite de martingales locales continues sur $[0,+\infty]$ pour la filtration $(\mathcal{F}_{t\wedge T}^{\mathbb{N}})_{t\in[0,+\infty]}$, de processus croissant $\langle N_{\cdot\wedge T}^n\rangle = \int_0^{\cdot\wedge T} a(X_s^n)\,\mathrm{d}s$.

Les $\langle N_{\cdot\wedge T}^n\rangle$ sont continus sur $[0,+\infty]$, nuls en 0 et uniformément bornés, donc d'après le Théorème 12 de [22] (voir aussi [21]) $N_{\cdot\wedge T}^l$ est une martingale locale continue par rapport à sa filtration naturelle $(\sigma(N_{u\wedge T}^l, 0\leqslant u\leqslant t))_{t\in[0,+\infty]}$. Son processus croissant est $\langle N_{\cdot\wedge T}^l\rangle = \int_0^{\cdot\wedge T} a(X_s^l)\,\mathrm{d}s$. Le fait que $\langle N_{\cdot\wedge T}^l\rangle$ soit borné assure que la martingale locale N^l est en fait une martingale L^2 sur $[0,T]$. Pour terminer, il suffit donc de montrer que N^l est $(\mathcal{F}_t^l)_{t\in[0,T]}$-adaptée.

On note $(D_k)_k$ une suite croissante d'ouverts relativement compacts de D telle que $\forall k \overline{D_k}\subset D_{k+1}$ et $\cup_k D_k = D$.

On décompose N_t^l en

$$N_t^l = \int_0^t \mathbb{1}_{D_k}(X_s^l)\,\mathrm{d}N_s^l + \int_0^t \mathbb{1}_{D_k^c}(X_s^l)\,\mathrm{d}N_s^l,$$

et on vérifie que

$$E^Q\left(\left|\int_0^t \mathbb{1}_{D_k^c}(X_s^l)\,\mathrm{d}N_s^l\right|^2\right) \leqslant t\,\mathrm{d}\|a\|_\infty \mu(D_k^c) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

donc il existe une sous-suite $(D_k^t)_k$ de $(D_k)_k$, dépendant de t, telle que

$$\int_0^t \mathbb{1}_{(D_k^t)^c}(X_s^l)\,\mathrm{d}N_s^l \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \quad Q\text{-p.s.},$$

ce qui assure que

$$N_t^l = \lim_{k\to+\infty}\int_0^t \mathbb{1}_{D_k^t}(X_s^l)\,\mathrm{d}N_s^l \quad Q\text{-p.s.}$$

Il suffit donc de montrer que pour chaque $k\in\mathbb{N}$, $\int_0^\cdot \mathbb{1}_{D_k}(X_s^l)\,\mathrm{d}N_s^l$ est $(\mathcal{F}_t^l)_{t\in[0,T]}$-adapté. Fixons k et choisissons $u\in\mathcal{C}_c^\infty(D)$ telle que $u(x)=x$ sur $\overline{D_k}$. On note Du la dérivée de u

On utilise d'abord la formule d'Itô pour obtenir

$$\begin{aligned} u(X_t^n) \;=\; & u(X_0^n) + \int_0^t Du(X_s^n)\,\mathrm{d}N_s^n \\ & + \int_0^t Du\frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s^n)\,\mathrm{d}s + \int_0^t Du\frac{a\nabla\rho_n}{2\rho_n}(X_s^n)\,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{5.1}$$

et on cherche la limite en loi de chacun des termes de cette expression. D'après le Théorème 2.2 de [19], la convergence en loi de (X^n, N^n) vers (X^l, N^l) implique celle de $(X^n, N^n, \int_0^t Du(X_s^n)\,\mathrm{d}N_s^n)$ vers $(X^l, N^l, \int_0^t Du(X_s^l)\,\mathrm{d}N_s^l)$ et donc

$$\begin{aligned}&\left(u(X_t^n), u(X_0^n), \int_0^t Du(X_s^n)\,\mathrm{d}N_s^n\right)\\ &\qquad \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{en loi}} \left(u(X_t^l), u(X_0^l), \int_0^t Du(X_s^l)\,\mathrm{d}N_s^l\right).\end{aligned}$$

D'autre part, comme $Du(\nabla.(ap)/2p)$ est continue bornée sur $\mathbb{R}^d$, la fonction $x \to \int_0^t Du(\nabla.(ap)/2p)(x_s)\,\mathrm{d}s$ est continue et par conséquent

$$\int_0^t Du\frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s^n)\,\mathrm{d}s \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^t Du\frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s^l)\,\mathrm{d}s \quad \text{en loi.}$$

Enfin, la majoration

$$\left|\int_0^t Du\frac{a\nabla\rho_n}{2\rho_n}(X_s^n)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \frac{t\|Du\|_\infty\|a\|_\infty\|\nabla\delta\|_\infty}{2n(\inf_\Delta \delta)^2}\exp\left(\frac{1}{\inf_\Delta \delta}\right),$$

où Δ est le support de u, permet d'affirmer que le terme $\int_0^t Du(a\nabla\rho_n/2\rho_n)(X_s^n)\,\mathrm{d}s$ converge Q-p.s. vers 0, et donc converge en loi vers 0. On peut donc passer à la limite dans (5.1), et on obtient

$$u(X_t^l) = u(X_0^l) + \int_0^t Du(X_s^l)\,\mathrm{d}N_s^l + \int_0^t Du\frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s^l)\,\mathrm{d}s.$$

D'où on conclut que le processus $\int_0^\cdot Du(X_s^l)\,\mathrm{d}N_s^n$ est $(\mathcal{F}_t^l)_{t\in[0,T]}$-adapté. Comme

$$\int_0^t \mathbb{1}_{D_k}(X_s^l)\,\mathrm{d}N_s^l = \int_0^t \mathbb{1}_{D_k}(X_s^l)Du(X_s^l)\,\mathrm{d}N_s^n$$

le processus $\int_0^\cdot \mathbb{1}_{D_k}(X_s^l)\,\mathrm{d}N_s^l$ est également $(\mathcal{F}_t^l)_{t\in[0,T]}$-adapté, ce qui termine la preuve pour N^l.

Le résultat énoncé pour $\overline{N}^l$ s'obtient par le même raisonnement, en remplaçant partout $\mathcal{F}_t$ par $\mathcal{G}_t$ et X_t^l par X_{T-t}^l. □

On montre ensuite que X^l est une semi-martingale sous Q.

LEMME 5.3. *Il existe un processus à variation bornée V^l, $(\mathcal{F}_t^l)_t$-adapté et continu, tel que*

$$X_t^l = X_0^l + N_t^l + \int_0^t \frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s^l)\,\mathrm{d}s + V_t^l \quad \forall t\in[0,T] \quad Q\text{-p.s.} \tag{5.2}$$

Preuve. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on se donne $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $u(x) = x$ sur $B(0,m)$ et supp $u \subset B(0, m+1)$. On procède de façon analogue à la démonstration du Lemme 5.2, en étudiant la convergence en loi de chacun des termes de l'expression

$$\begin{aligned} u(X_t^n) \;=\; & u(X_0^n) + \int_0^t Du(X_s^n)\,\mathrm{d}N_s^n \\ & + \int_0^t Du\frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s^n)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{a\nabla\rho_n}{2\rho_n}(X_s^n)\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{5.3}$$

On peut à nouveau utiliser le Théorème 2.2 de [19] qui assure que

$$\begin{aligned} & \left(u(X_t^n), u(X_0^n), \int_0^t Du(X_s^n)\,\mathrm{d}N_s^n\right) \\ & \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \left(u(X_t^l), u(X_0^l), \int_0^t Du(X_s^l)\,\mathrm{d}N_s^l\right). \end{aligned}$$

Comme $a, \nabla.a$ et $a(\nabla p/p)$ sont supposées continues bornées sur $\overline{D}$, la fonction $x \to \int_0^t Du(\nabla.(ap)/2p)(x_s)\,\mathrm{d}s$ est continue, donc

$$\int_0^t Du\frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s^n)\,\mathrm{d}s \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \int_0^t Du\frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s^l)\,\mathrm{d}s.$$

Il reste à montrer que le dernier terme de (5.3) converge en loi vers un processus à variation bornée. Or ce terme vérifie

$$\begin{aligned} \forall t \geqslant 0 \quad & \sup_n E^Q\left(\int_0^t \left|Du\frac{a\nabla\rho_n}{2\rho_n}\right|(X_s^n)\,\mathrm{d}s\right) \\ & = \sup_n (t/2)\gamma_n \int_{D\cap B(0,m+1)} |Du\; a\nabla\rho_n| p\,\mathrm{d}x \\ & \leqslant (t/2)\|Du\|_\infty \|a\|_\infty \gamma_1 \sup_n \int_{D\cap B(0,m+1)} |\nabla\rho_n| p\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

L'hypothèse (HPW) (ii) implique qu'il existe une partie infinie I de $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\sup_{n\in I} \int_{D\cap B(0,m+1)} |\nabla\rho_n|(x)p(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Il existe donc une sous-suite de la suite

$$\left(\int_0^t Du\frac{a\nabla\rho_n}{2\rho_n}(X_s^n)\,\mathrm{d}s\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

qui est uniformément bornée en espérance et qui, d'après [22] Corollaire 9, converge en loi vers un processus à variation bornée $V^{l,m}$ qui vérifie

$$E^Q\left(\int_0^t |\mathrm{d}V^{l,m}|\right)$$
$$\leqslant (t/2)\|Du\|_\infty \|a\|_\infty \gamma_1 \sup_{n\in I}\int_{D\cap B(0,m+1)} |\nabla\rho_n| p\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Pour Q-presque tout ω et tout $t \in [0,T]$, on a donc

$$u(X_t^l) = u(X_0^l) + \int_0^t Du(X_s^l)\,\mathrm{d}N_s^l + \int_0^t Du\frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s^l)\,\mathrm{d}s + V_t^{l,m}.$$

Comme $u(x) = x$ sur $B(0,m)$, en notant $\tau_m = \inf\{t \geqslant 0/|X_t^l| \geqslant m\}$, on obtient

$$u(X_{t\wedge\tau_m}^l) = u(X_0^l) + \int_0^{t\wedge\tau_m} \mathrm{d}N_s^l + \int_0^{t\wedge\tau_m} \frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s^l)\,\mathrm{d}s + V_{t\wedge\tau_m}^{l,m}.$$

Ceci étant vrai pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on peut faire tendre m vers $+\infty$. τ_m tend alors vers $+\infty$ et on a

$$X_t^l = X_0^l + N_t^l + \int_0^t \frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s^l)\,\mathrm{d}s + V_t^l \quad \forall t\in[0,T] \quad Q\text{-p.s.}, \tag{5.4}$$

où V^l est définie en utilisant la consistance de la suite $(V^{l,m}_{\cdot\wedge\tau_m})_m$: pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ on pose $V^l_{\cdot\wedge\tau_m} = V^{l,m}_{\cdot\wedge\tau_m}$ Q-p.s.. Le processus V^l est à variation bornée par construction, et continu $(\mathcal{F}_t^l)_t$-adapté d'après (5.4). □

REMARQUE 5.4. Si D est borné, on peut trouver une constante C_{sup} indépendante de m telle que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*$$
$$\tfrac{1}{2}\|Du\|_\infty\|a\|_\infty\gamma_1 \sup_{n\in I}\int_{D\cap B(0,m+1)} |\nabla\rho_n|(x)p(x)\,\mathrm{d}x \leqslant C_{\mathrm{sup}} < +\infty.$$

Le processus limite $V^{l,m}$ vérifie alors

$$E^Q\left(\int_0^t |\mathrm{d}V_s^l|\right)$$
$$= \sum_m E^Q\left(\int_0^t |\mathrm{d}V_s^{l,m}| 1\!\!1_{\tau_{m-1}<t\leqslant\tau_m}\right)$$
$$\leqslant tC_{\mathrm{sup}}\sum_m Q(\tau_{m-1} < t \leqslant \tau_m) \leqslant tC_{\mathrm{sup}} < +\infty.$$

D'après le Lemme 5.3, X^l est une semi-martingale sous Q. Notre but étant de montrer que le processus canonique X sur $\Omega = \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$ est une semi-martingale sous Q^s, il nous faut 'transporter' les résultats précédents par l'application

$$X^l : (\Omega^{\mathbb{N}^*}, (\mathcal{F}_t^{\mathbb{N}})_t) \to (\Omega, (\mathcal{F}_t)_t),$$

$$\omega \to X^l(\omega).$$

On sait que $Q^s = Q \circ (X^l)^{-1}$. Comme N^l et V^l sont $(\mathcal{F}_t^l)_t$-adaptés sur $\Omega^{\mathbb{N}^*}$, il existe des processus N et V sur Ω tels que pour tout $t \in [0,T]$: $N_t(X^l) = N_t^l$ et $V_t(X^l) = V_t^l$ Q-p.s. Il est clair que N et V sont des processus à trajectoires Q-p.s. continues, que V est à variation bornée Q^s-p.s. et que N est une martingale L^2 de processus croissant $\int_0^\cdot a(X_s)\,\mathrm{d}s$. L'égalité (5.2) se traduit immédiatement par

$$X_t = X_0 + N_t + \int_0^t \frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s)\,\mathrm{d}s + V_t \quad \forall t \in [0,T]\ Q^s\text{-p.s.},$$

ce qui prouve que X est une semi-martingales sous Q^s.

REMARQUE 5.5. Si D est borné d'après la Remarque 5.4 on a

$$E^{Q^s}\left(\int_0^1 |\mathrm{d}V_s|\right) = E^Q\left(\int_0^1 |\mathrm{d}V_s^l|\right) < +\infty.$$

X est alors une Q^s-quasi-martingale au sens de [11] Proposition 1.1. En prenant $\sigma = \mathrm{Id}$ et $p = 1$ (qui vérifient (HPW) (i)), on voit que le brownien réfléchi dans $\overline{D}$ est une quasi-martingale. Le Théorème 1.1 de [11] permet d'en déduire que D est un ensemble de Caccioppoli fort, i.e.

$$\exists C > 0 / \forall g \in H^1(D) \cap \mathcal{C}_b(D)\ \forall i \in \{1,\dots,d\} \quad \int_D \frac{\partial g}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x \leqslant C\|g\|_\infty.$$

Donc tout ouvert borné qui vérifie (HPW) (ii) est un ensemble de Caccioppoli fort.

6. Étude du terme de réflexion

On cherche ici à identifier la façon dont la diffusion réfléchie réversible de loi Q^s se réfléchit au bord de l'ouvert D. Dans le cas où le bord de D est lisse (au moins $\mathcal{C}^2$) et non caractéristique, cette réflexion est conormale, c'est-à-dire que la mesure de Revuz associée au terme de réflexion est $a\boldsymbol{n}p\,\mathrm{d}\alpha$, où $\boldsymbol{n}$ est la normale intérieure au bord de D et α la mesure de surface sur le bord de D. Dans le cas où le bord de D n'est plus lisse, mais vérifie les hypothèses sous lesquelles Chen a construit le brownien réfléchi dans D (cf [10]), on veut montrer que ceci est toujours vrai, à condition de définir $\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\alpha$ comme la mesure de Revuz du brownien réfléchi dans

D. Rappelons d'abord la façon dont Chen construit la normale et la mesure sur le bord de D à partir du brownien réfléchi.

6.1. RAPPEL DES RÉSULTATS DE CHEN

On fait sur D les hypothèses suivantes

(HC) *D est borné et il existe une suite croissante $(D_k)_k$ d'ouverts relativement compacts à bords $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\forall k\ \overline{D_k} \subset D_{k+1}, \bigcup_k D_k = D$ et $\sup_k \alpha_k(\partial D_k) < +\infty$ où α_k est la mesure de surface sur le bord ∂D_k de D_k.*

REMARQUE 6.1. Une condition suffisante pour qu'une telle suite $(D_k)_k$ existe est que l'hypothèse de contenu Minkowski énoncée à la Section 5 (Rem. 5.1) soit vérifiée (cf [10] Lem. 2.5). Une condition nécessaire est que D soit un ensemble de Caccioppoli fort (cf [11] Thm. 5.1.).

On définit sur D la forme de Dirichlet

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{H}) = H^1(D), \\ \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{H}) \quad \mathcal{H}(f,f) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_D |\nabla f|^2 \,\mathrm{d}x, \end{cases}$$

qui est locale mais non-régulière sur D.

D'après [10] Section 3, il existe un compactification $\tilde{D}$ de D sur laquelle $(\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{H}))$ est régulière. Plus exactement, $\tilde{D}$ est un compact dont D est un ouvert dense, la topologie de $\tilde{D}$ induit sur D la topologie euclidienne, et on étend la mesure de Lebesgue à $\tilde{D}$ en posant $\mathrm{d}x(A) := \mathrm{d}x(A \cap D)$ pour tout borélien A de $\tilde{D}$. On peut ainsi identifier $L^2(\tilde{D}, \mathrm{d}x)$ et $L^2(D, \mathrm{d}x)$. $(\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{H}))$, construite sur $L^2(D, \mathrm{d}x)$ est alors définie sur $L^2(\tilde{D}, \mathrm{d}x)$, on dit qu'on a défini $(\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{H}))$ sur $\tilde{D}$. La compactification $\tilde{D}$ est choisie pour que $(\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{H}))$ soit régulière sur $\tilde{D}$.

De plus on peut choisir $\tilde{D}$ pour que pour chaque $i \in \{1, \dots, d\}$, la fonction de D dans $\mathbb{R}$ $x \to x_i$ se prolonge à $\tilde{D}$ de façon continue. On note π^i ce prolongement. La fonction $\pi := (\pi^1, \dots, \pi^d)$ envoie $\tilde{D}$ sur $\overline{D}$ et $\partial\tilde{D}$ sur $\partial\overline{D}$ (excepté un ensemble de $\partial\tilde{D}$ de $\mathcal{H}$-capacité nulle).

On note $(\Omega, (\mathcal{F}_t^W)_t, \tilde{W}, (P_x)_{x\in\tilde{D}})$ la diffusion réfléchi réversible associée à $(\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{H}))$.

Sous les hypothèses (HC), la suite des mesures vectorielles $(\boldsymbol{n}_k \,\mathrm{d}\alpha_k)_k$, où $\boldsymbol{n}_k$ est la normale intérieure au bord de D_k, converge faiblement vers une mesure $\boldsymbol{n}$ $\mathrm{d}\alpha$, où α est une mesure scalaire positive portée par le bord de $\tilde{D}$ et $\boldsymbol{n}$ un vecteur unitaire défini α-p.p. sur $\partial\tilde{D}$. Le brownien réfléchi $W = \pi \circ \tilde{W}$ dans $\overline{D}$ admet alors la décomposition suivante (cf [10]) Thm. 4.4)

$$W_t = W_0 + B_t + \int_0^t \boldsymbol{n}(\tilde{W}_s)\,\mathrm{d}L_s \quad \forall t \geqslant 0\ P_x\text{-p.s.}$$

pour tout x de $\tilde{D}$ (hors d'un ensemble de $\partial\tilde{D}$ de $\mathcal{H}$-capacité nulle) où B est une fonctionnelle additive martingale (en abrégé MAF) brownienne de $\tilde{W}$ et L

la fonctionnelle additive continue positive (en abrégé PCAF) de $\tilde{W}$ associée à la mesure régulière $\frac{1}{2}\alpha$ (cf [14] Chap. 5).

Enfin, la 'normale intérieure $\boldsymbol{n}$ définie par le brownien réfléchi' vérifie la formule de Green (cf [10] Thm. 4.5)

$$\forall f, g \in H^1(D) \cap L^\infty(D) / \nabla g \in H^1(D) \cap L^\infty(D)$$

$$\begin{aligned}
&\int_D f(x)\Delta g(x)\,\mathrm{d}x + \int_D \nabla f(x).\nabla g(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad = -\int_{\partial\tilde{D}} f(x)\nabla g(x).\boldsymbol{n}(x)\,\mathrm{d}\alpha(x).
\end{aligned}$$

REMARQUE 6.2. Il n'y a pas nécessairement unicité de la compactification $\tilde{D}$ qui rend $(\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{H}))$ régulière. Mais ce qui suit est valable pour toute compactification $\tilde{D}$ ayant les propriétés énoncées précédemment.

6.2. LA FAMILLE FORTEMENT MARKOVIENNE ASSOCIÉE À $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s S))$

On veut décomposer la diffusion réfléchie associée à $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ en utilisant $\boldsymbol{n}$. Il faut pour cela que $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ soit régulière sur $\tilde{D}$. On fait donc ici, outre les hypothèse (HSP) et (HPW), l'hypothèse (HC) qui assure l'existence de $\boldsymbol{n}$ et l'hypothèse suivante sous laquelle $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est régulière sur $\tilde{D}$

(HR) $H^1(D)$ est dense dans $H(D, \mu, a\mu)$.

Puisque la forme $(\mathcal{E}^s, \mathcal{D}(\mathcal{E}^s))$ est régulière et fortement locale au sens où: $\forall u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s)/u, v$ à supports compacts

$$v \text{ constant sur un voisinage de supp}\,(u) \Rightarrow \mathcal{E}^s(u, v) = 0,$$

on sait qu'il existe une famille $(Q^{s,x})_{x\in\tilde{D}}$ fortement markovienne et μ-réversible sur $(\mathcal{C}([0,T], \tilde{D}), (\tilde{\mathcal{F}}_t)_t)$, où $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\in[0,T]}$ est la filtration (régularisée à droite et complétée) donnée par le processus canonique $\tilde{X}$ sur $\mathcal{C}([0,T], \tilde{D})$, telle que

$$\forall f \in L^2(D, \mu) \text{ bornée} \quad E^{Q^{s,x}}(f(\tilde{X}_t)) = T_t^s f(x) \quad \mu\text{-p.s.}$$

Q^s est alors par construction l'image de $Q^{s,\mu} = \int_{\tilde{D}} Q^{s,x}\,\mathrm{d}\mu(x)$ par π.

PROPOSITION 6.3. *Pour $\mathcal{E}^s$-quasi tout x de $\tilde{D}$*

$$Q^{s,x}\left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\partial\tilde{D}}(\tilde{X}_s)\,\mathrm{d}s > 0\right) = 0.$$

Preuve. (cf preuve du Lem. 3.1 de [10]). Posons $\theta(x) = E^{Q^{s,x}}(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\partial\tilde{D}}(\tilde{X}_s)\,\mathrm{d}s)$.

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{D}} \theta(x)\,\mathrm{d}\mu(x) &= E^{Q^{s,\mu}}\left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\partial\tilde{D}}(\tilde{X}_s)\,\mathrm{d}s\right)\\ &= \int_0^{+\infty}\int_{\tilde{D}} \mathbb{1}_{\partial\tilde{D}}(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}s = 0,\end{aligned}$$

donc $\theta = 0$ μ-p.s. sur $\tilde{D}$.

θ est une fonction 0-excessive (i.e. $T_t\theta \leqslant \theta$ et $T_t\theta(x) \to \theta(x)$ quand $t \to 0$ pour tout $x \in \tilde{D}$), donc d'après [6] Proposition II 4.2 elle est finement continue sur $\tilde{D}$. On en déduit (cf [14] Lem. 4.2.4) que θ est nulle $\mathcal{E}^s$-quasi partout sur $\tilde{D}$. Ceci implique le résultat annoncé, puisque une fonction positive d'espérance nulle est nulle p.p. □

6.3. LA DÉCOMPOSITION EN FONCTIONNELLES ADDITIVES

Fixons $i \in \{1, \dots, d\}$.

La fonction π^i est continue sur $\tilde{D}$ et vérifie $\pi^i(x) = x_i$ et $\nabla\pi^i(x) = (\partial_j\pi^i = \delta_{ij})_{1\leqslant j\leqslant d}$ sur D. On a supposé ici D borné, donc π^i est bornée et $\pi^i \in H(D,\mu,a\mu)$. On peut alors utiliser [14], Sections 5.1 et 5.2, pour décomposer la fonctionnelle additive $A^i_t = \pi^i(\tilde{X}_t) - \pi^i(\tilde{X}_0)$. D'après [14] Théorème 5.2.2, A^i se décompose de façon unique en $A^i = M^i + U^i$ où M^i est une martingale fonctionnelle additive (cf [14] Chap. 5.2 II) et U^i une fonctionnelle additive continue d'énergie nulle (cf [14] Chap. 5.2 III).

La fonction

$$\mathcal{C}([0,+\infty[,\tilde{D}) \to \mathcal{C}([0,+\infty[,\overline{D}),$$

$$(t \to \tilde{X}_t) \to (t \to \pi(\tilde{X}_t)),$$

qu'on note encore π, est continue sur $\mathcal{C}([0,+\infty[,\tilde{D})$ et injective sur l'ensemble

$$\left\{\tilde{X} \in \mathcal{C}([0,+\infty[,\tilde{D}) \Big/ \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\partial\tilde{D}}(\tilde{X}_s)\,\mathrm{d}s = 0\right\},$$

qui est de probabilité 1 sous $Q^{s,\mu}$. Il est donc licite de définir $\tilde{M}$ et $\tilde{U}$ Q^s-p.s. sur $\mathcal{C}([0,+\infty[,\overline{D})$ par $\tilde{M}_t(\pi(\tilde{X})) = M_t(\tilde{X})$ et $\tilde{U}_t(\pi(\tilde{X})) = U_t(\tilde{X})$. Par un raisonnement identique à celui qui permet de passer de (N^l,V^l) à (N,V) (cf fin de la Sect. 5), on vérifie que $\tilde{M}$ est une Q^s-martingale et que la variation quadratique de $\tilde{U}$ sous Q^s est égale à celle de U sous $Q^{s,\mu}$, qui est nulle puisque U est d'énergie nulle (d'après [14] (5.2.10)).

Comme

$$(\pi(\tilde{X}))_t - (\pi(\tilde{X}))_0 = \tilde{M}_t(\pi(\tilde{X})) + \tilde{U}_t(\pi(\tilde{X}))\forall t \in [0,+\infty[\ Q^{s,\mu}\text{-p.s.},$$

on a la décomposition

$$X_t - X_0 = \tilde{M}_t(X) + \tilde{U}_t(X) \quad \forall t \in [0,+\infty[Q^s\text{-p.s.},$$

ce qui, en identifiant avec la décomposition en semi-martingale obtenue à la Section 5, donne

$$\tilde{M}_t(X) + \tilde{U}_t(X) = N_t + \int_0^t \frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s)\,\mathrm{d}s + V_t \quad \forall t \in [0,T]\ Q^s\text{-p.s.}$$

Le terme $\int_0^{\cdot}(\nabla.(ap)/2p)(X_s)\,\mathrm{d}s + V$ est à variation bornée, donc de variation quadratique nulle. La martingale

$$\tilde{M}(X) - N = \int_0^{\cdot} \frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s)\,\mathrm{d}s + V - \tilde{U}(X)$$

est de variation quadratique nulle, donc elle est nulle. En utilisant la Remarque 5.5, on en déduit que pour tout $T > 0$

$$\begin{aligned} E^{Q^{s,\mu}}\left(\int_0^T |\mathrm{d}U_s|\right) &= E^{Q^s}\left(\int_0^T |\mathrm{d}\tilde{U}_s|\right) \\ &= E^{Q^s}\left(\int_0^T \left|\frac{\nabla.(ap)}{2p}(X_s)\right|\mathrm{d}s + \int_0^T |\mathrm{d}V_s|\right) < +\infty. \end{aligned}$$

6.4. LES TERMES À VARIATION BORNÉE

Une fonctionnelle additive F qui est à variation bornée au sens usuel (i.e. $\int_0^T |\mathrm{d}F_s| < +\infty\ \forall T > 0\ Q^{s,\mu}$-p.s.) est à variation bornée au sens de [14] p. 143

Il existe un borélien $\mathcal{N}$ de $\tilde{D} \cup \{\Delta\}$ de capacité nulle tel que

$$\forall x \in \tilde{D} \cup \{\Delta\} - \mathcal{N} \quad Q^{s,x}(s \to F_s \textit{ à variation bornée sur } [0,T]\ \forall T >) = 1.$$

(Ceci est du au fait que la fonction qui à x associe $Q^{s,x}(\exists t > 0 / \int_0^t |\mathrm{d}F_s| = +\infty)$ est 0-excessive, donc nulle $\mathcal{E}^s$-quasi partout dès qu'elle est nulle μ-p.s.)

U^i est à variation bornée au sens usuel, donc à variation bornée au sens de [14]. Il existe donc une mesure régulière signée μ_{U^i} associée à U^i. Elle est somme des deux mesures régulières signées μ_{J^i} et μ_{K^i} associée aux fonctionnelles additives à variation bornée

$$J^i = \int_0^{\cdot} \sum_j \frac{\partial_j(a_{ij}p)}{2p}(\pi(\tilde{X}_s))\,\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad K^i = U^i - J^i.$$

La mesure μ_{J^i} est facile à identifier. Elle vérifie par définition: $\forall t > 0\ \forall f, h$ boréliennes positives sur $\tilde{D}$

$$\int_{\tilde{D}} E^{Q^{s,x}} \left(\int_0^t f(\tilde{X}_s) \sum_j \frac{\partial_j(a_{ij}p)}{2p} (\pi(\tilde{X}_s))\, \mathrm{d}s \right) h(x)\, \mathrm{d}\mu(x)$$

$$= \int_0^t \int_{\tilde{D}} T_s^s h f\, \mathrm{d}\mu_{J^i}\, \mathrm{d}s.$$

En prenant $h \equiv 1$, et donc $T_s^s h \equiv 1$ puisque la diffusion de loi $Q^{s,\mu}$ est conservative, on obtient que

$$\mathrm{d}\mu_{J^i} = \sum_j \frac{\partial_j(a_{ij}p)}{2p}\, \mathrm{d}\mu.$$

Pour déterminer la mesure régulière

$$\mathrm{d}\mu_{K^i} = \mathrm{d}\mu_{U^i} - \sum_j \frac{\partial_j(a_{ij}p)}{2p}\, \mathrm{d}\mu$$

associée au terme de réflexion K^i, il suffit donc d'identifier μ_{U^i}.

6.5. IDENTIFICATION DE LA MESURE DE REVUZ

On utilise pour cela le Lemme 2.2 de [10]. Puisque $E^{Q^s}(\int_0^1 |\mathrm{d}U_s^i|) < +\infty$, on sait que $|\mu_{U^i}|(\tilde{D}) < +\infty$ et donc

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^s) \cap L^\infty(\tilde{D}) \quad \mathcal{E}^s(\pi^i, f) = -\int_{\tilde{D}} f\, \mathrm{d}\mu_{U^i}.$$

On en déduit que pour toute fonction f de $\mathcal{D}(\mathcal{E}^s) \cap L^\infty(\tilde{D})$

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{D}} f\, \mathrm{d}\mu_{K^i} &= -\mathcal{E}^s(\pi^i, f) - \int_D \sum_j \frac{\partial_j(a_{ij}p)}{2p} f\, \mathrm{d}\mu \\
&= -\frac{1}{2} \int_D \sum_j a_{ij} p \partial_j f + \partial_j(a_{ij}p) f\, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2} \int_D \sum_j \partial_j(a_{ij}pf)\, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2} \sum_j \int_D \nabla \pi^j . \nabla(a_{ij}pf)\, \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

et on utilise la formule de Green établie par Chen (cf [10] Thm. 4.5). La fonction π^j et sa dérivée sont $H^1(D)$ bornées. a_{ij} et p sont $H^1(D)$ bornées, donc si f l'est aussi le produit $a_{ij}pf$ est $H^1(D)$ borné et on a pour toute $f \in H^1(D) \cap L^\infty(\tilde{D})$

$$\int_{\tilde{D}} f \,\mathrm{d}\mu_{K^i} = -\frac{1}{2} \sum_j \int_{\tilde{D}} a_{ij} p f \nabla \pi^j.(-\boldsymbol{n}) \,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2} \int_{\tilde{D}} f (a\boldsymbol{n})_i p \,\mathrm{d}\alpha.$$

Ceci est vrai en particulier pour $f \in \mathcal{C}(\tilde{D}) \cap H^1(D)$, et donc par densité pour toute $f \in \mathcal{C}(\tilde{D})$, puisque $(\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathcal{H}))$ est régulière. Par conséquent $\mathrm{d}\mu_{K^i} = \frac{1}{2}(a\boldsymbol{n})_i p \,\mathrm{d}\alpha$.

6.6. CONCLUSION

Le résultat précédent étant vrai pour chaque $i \in \{1, \ldots, d\}$, la diffusion réfléchie $\pi(\tilde{X})$ à valeurs dans $\overline{D}$ admet la décomposition suivante

$$\pi(\tilde{X}_t) \;=\; \pi(\tilde{X}_0) + M_t(\tilde{X}) + \int_0^t \frac{\nabla.(ap)}{2p}(\pi(\tilde{X}_s)) \,\mathrm{d}s + K_t(\tilde{X})$$

$$\forall t \in [0, T] \; Q^{s,x}\text{-p.s.}$$

$$\text{pour } \mathcal{E}^s\text{-quasi-tout } x \text{ de } \tilde{D},$$

où $M(\tilde{X})$ est une $Q^{s,\mu}$-martingale L^2 de processus croissant $\int_0^\cdot a(\pi(\tilde{X}_s)) \,\mathrm{d}s$ et $K(\tilde{X})$ une fonctionnelle additive à variation bornée de mesure régulière associée $\frac{1}{2}a\boldsymbol{n}p \,\mathrm{d}\alpha$.

Le fait que $\frac{1}{2}a\boldsymbol{n}p \,\mathrm{d}\alpha$ soit portée par le bord de $\tilde{D}$ assure que $K.(\tilde{X})$ vérifie

$$K_t(\tilde{X}) \;=\; \int_0^t \mathbb{1}_{\tilde{X}_s \in \partial \tilde{D}} \,\mathrm{d}K_s(\tilde{X}) \quad \forall t \in [0, T] \; Q^{s,x}\text{-p.s.}$$

$$\text{pour } \mathcal{E}^s\text{-quasi-tout } x \text{ de } \tilde{D}.$$

7. Des cas où $H^1(D)$ est dense dans $H(D, \mu, a\mu)$

La décomposition précédente a été obtenue sous l'hypothèse

(HR) *$H^1(D)$ est dense dans $H(D, \mu, a\mu)$.*

Avant tout, il y a lieu de faire quelques remarques sur cette hypothèse.

REMARQUE 7.1. Il y a certains cas où il est immédiat que (HR) est vérifiée. Par exemple si $D = \mathbb{R}^d$ ou si ap décroît très vite au bord de D, (HR) est vraie (cf Lem. 2.4). Il est immédiat aussi que (HR) est vraie si a est uniformément elliptique et p uniformément minorée par une constante strictement positive (et même, d'après la Prop. 7.3, l'hypothèse 'p uniformément minorée' est inutile ici).

REMARQUE 7.2. Dans l'approximation par pénalisation et l'approximation par l'intérieur (pour le cas a localement uniformément elliptique) présentées dans [23], l'identification de la forme de Dirichlet (éventuellement non régulière) associée au processus limite est obtenue sous l'hypothèse (cf [23] Thm. 3.9 (A4) et Rem. 4.6)

$$\{f_{|D}/f \in L^\infty(\mathbb{R}^d), \nabla f \in L^\infty(\mathbb{R}^d), f \text{ à support compact}\}$$

est dense dans $\mathcal{D}(\mathcal{E})$.

Cette hypothèse implique que (HR) est vérifiée.

Nous présentons ici quelques cas particuliers où nous savons montrer que (HR) est vraie. Montrons d'abord que l'on peut se ramener au cas où μ est la mesure de Lebesgue sur D.

PROPOSITION 7.3. *Si $p \in \mathcal{C}_b^1(D), p > 0$ sur D et si p vérifie la condition d'énergie finie, alors $H(D, \mathrm{d}x, a\,\mathrm{d}x)$ est dense dans $H(D, \mu, a\mu)$.*

Cette proposition signifie que si (HR) est vraie avec $\mu = \mathrm{d}x$, elle est vraie avec une probabilité μ quelconque(vérifiant (HSP)).

Preuve. On fixe $u \in H(D, \mu, a\mu)$. Il n'est pas restrictif de supposer que $\|u\|_\infty < +\infty$ puisque les fonctions bornées sont denses dans $H(D, \mu, a\mu)$. On cherche une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $H(D, \mathrm{d}x, a\,\mathrm{d}x)$ convergeant vers u dans $H(D, \mu, a\mu)$. On définit $\psi_n : \mathbb{R}^+ \to [0, 1]$ par $\psi_n(x) = 0 \vee (2^n x - 1) \wedge 1$ et on approche u par la fonction $u_n = \psi_n(\sqrt{p})u$. Il est clair que $u_n \in H(D, \mathrm{d}x, a\,\mathrm{d}x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la convergence de u_n vers u dans $L^2(D, \mu)$ est immédiate par convergence dominée. Il reste à montrer que $\sigma\nabla u_n$ tend vers $\sigma\nabla u$ dans $L^2(D, \mu)$

$$\begin{aligned}
&\int_D |\sigma\nabla u - \sigma\nabla u_n|^2 p\,\mathrm{d}x \\
&\quad\leqslant 2\int_D (1 - \psi_n(\sqrt{p}))^2 |\sigma\nabla u|^2 p\,\mathrm{d}x \\
&\qquad + 2\int_D 2^{2n} \mathbb{1}_{(2^{-n} \leqslant \sqrt{p} \leqslant 2^{-n+1})} p u^2 \left|\sigma \frac{\nabla p}{2\sqrt{p}}\right|^2 \mathrm{d}x \\
&\quad\leqslant 2\int_D \mathbb{1}_{(0<\sqrt{p}<2^{-n+1})} |\sigma\nabla u|^2 p\,\mathrm{d}x \\
&\qquad + \tfrac{2}{4} 2^{2n} 2^{-2n+2} \|u\|_\infty^2 \int_D \mathbb{1}_{(0<\sqrt{p}<2^{-n+1})} \left|\sigma \frac{\nabla p}{p}\right|^2 p\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

qui tend vers 0 par convergence dominée. □

PROPOSITION 7.4. *Si D est un domaine de $\mathbb{R}$ (i.e. si $d = 1$) et si le bord de l'ensemble où σ s'annule est négligeable pour la mesure de Lebesgue (i.e. si $\mathrm{d}x(\partial(\sigma = 0)) = 0$) alors $H^1(D)$ est dense dans $H(D, \mu, a\mu)$.*

Preuve. En dimension 1, on peut supposer que $\sigma \geqslant 0$ en prenant $\sigma = \sqrt{a} = |\sigma|$. La fonction σ peut alors n'être plus $\mathcal{C}_b^1(D)$, mais elle reste bornée à dérivée p.p. bornée (i.e. $W^{1,\infty}(D)$). D'après la proposition précédente, il suffit de montrer que $H^1(D)$ est dense dans $H(D, \mathrm{d}x, a\,\mathrm{d}x)$. Pour cela, on va utiliser la suite régularisante $(J_\varepsilon)_\varepsilon$ définie lors de la démonstration du Théorème 2.8, et une suite croissante $(\psi_n)_n$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à supports compacts dans l'intérieur de $\{\sigma = 0\}$, qui tend presque sûrement vers la fonction caractéristique de l'intérieur de $\{\sigma = 0\}$:

$$\mathbb{1}_{\overset{\circ}{\{\sigma=0\}}}.$$

On se donne une fonction u de $H(D, \mathrm{d}x, a\,\mathrm{d}x)$. Quitte à multiplier u par une fonction $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dont on fait tendre ensuite le support vers $\mathbb{R}$, on peut se ramener au cas où u est à support borné. On définit pour $\varepsilon > 0, \eta > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction approchée

$$u_{\varepsilon,\eta,n} = \frac{1}{\sigma + \eta}(\sigma u) + (J_\varepsilon * u)\psi_n.$$

Puisque $u \in H(D, \mathrm{d}x, a\,\mathrm{d}x)$ et $\sigma \in \mathcal{C}_b^1$, la fonction (σu) appartient à $H^1(D)$ et a pour dérivée (au sens des distributions) $\sigma \nabla u + u \nabla \sigma$. Par conséquent, $u_{\varepsilon,\eta,n} \in H^1(D)$ et a pour dérivée

$$\begin{aligned}\nabla u_{\varepsilon,\eta,n} \;=\; & -\frac{\nabla\sigma}{(\sigma+\eta)^2}(\sigma u) + \frac{1}{\sigma+\eta}(\sigma\nabla u + u\nabla\sigma) \\ & + (\nabla J_\varepsilon * u)\psi_n + (J_\varepsilon * u)\nabla\psi_n.\end{aligned}$$

On veut montrer que $u_{\varepsilon,\eta,n}$ converge vers u dans $H(D, \mathrm{d}x, a\,\mathrm{d}x)$ quand n tend vers $+\infty$ et ε et η tendent vers 0.

Pour tout $\theta > 0$, le terme $\|u_{\varepsilon,\eta,n} - u\|_{L^2(D,\mathrm{d}x)}$ est majoré par

$$\begin{aligned}&\Big\| \frac{1}{\sigma+\eta}(\sigma u) + (J_\varepsilon * u)\psi_n - \frac{\sigma u}{\sigma+\eta} - \frac{\eta u}{\sigma+\eta}\psi_n \\ &\qquad + \frac{\eta u}{\sigma+\eta}(\psi_n - 1)(\mathbb{1}_{\sigma\geqslant\theta} + \mathbb{1}_{\sigma<\theta}) \Big\|_{L^2(D,\mathrm{d}x)} \\ &\quad \leqslant \|J_\varepsilon * u - u\|_{L^2(D,\mathrm{d}x)} + \frac{\eta}{\theta+\eta}\|u\|_{L^2(D,\mathrm{d}x)} \\ &\qquad + \|u(\psi_n - 1)\mathbb{1}_{\sigma<\theta}\|_{L^2(D,\mathrm{d}x)},\end{aligned}$$

et le terme $\|\sigma\nabla u_{\varepsilon,\eta,n} - \sigma\nabla u\|_{L^2(D,\mathrm{d}x)}$ est plus petit que

$$\Big\| \frac{\sigma\eta}{(\sigma+\eta)^2}(\nabla\sigma)u(\mathbb{1}_{\sigma\geqslant\theta} + \mathbb{1}_{0<\sigma<\theta}) \Big\|_{L^2(D,\mathrm{d}x)}$$

$$+\left\|\frac{\eta}{\sigma+\eta}\sigma\nabla u|(\mathbb{1}_{\sigma\geqslant\theta}+\mathbb{1}_{0<\sigma<\theta})\right\|_{L^2(D,\mathrm{d}x)}$$

$$\leqslant\frac{\eta}{\theta+\eta}(\|(\nabla\sigma)u\|_{L^2(D,\mathrm{d}x)}+\|\sigma\nabla u\|_{L^2(D,\mathrm{d}x)})$$

$$+\|(\nabla\sigma)u\mathbb{1}_{0<\sigma<\theta}\|_{L^2(D,\mathrm{d}x)}+\|\sigma\nabla u\mathbb{1}_{0<\sigma<\theta}\|_{L^2(D,\mathrm{d}x)}.$$

Fixons $\alpha>0$. On peut trouver un θ assez et un n assez grand pour que les termes $\|u(\psi_n-1)\mathbb{1}_{\sigma<\theta}\|_{L^2(D,\mathrm{d}x)}$, $\|(\nabla\sigma)u\mathbb{1}_{0<\sigma<\theta}\|_{L^2(D,\mathrm{d}x)}$ et $\|\sigma\nabla u\mathbb{1}_{0<\sigma<\theta}\|_{L^2(D,\mathrm{d}x)}$ soient tous plus petits que α, puis un η assez petit pour avoir $(\eta/(\theta+\eta))\|u\|_{L^2(D,\mathrm{d}x)}$ et

$$\frac{\eta}{\theta+\eta}(\|(\nabla\sigma)u\|_{L^2(D,\mathrm{d}x)}+\|\sigma\nabla u\|_{L^2(D,\mathrm{d}x)})$$

également inférieurs à α. Quand ε est assez petit pour que $\|J_\varepsilon*u-u\|_{L^2(D,\mathrm{d}x)}$ soit majoré par α, on a alors $\|u_{\varepsilon,\eta,n}-u\|_{H(D,\mathrm{d}x,a\,\mathrm{d}x)}<6\alpha$. □

Cas particulier: *Si*

$$D=]0,1[^2,\quad \mathrm{d}\mu=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\quad \textit{et}\quad \sigma(x)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

alors $H^1(D)$ est dense dans $H(D,\mu,a\mu)$.

Preuve. Fixons $u\in H(D,\mu,a\mu)\cap L^\infty(D)$. En notant $(J_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite régularisante sur $\mathbb{R}$ (cf preuve du Thm. 2.8), on approche u par

$$u_\varepsilon(x,y)=(J_\varepsilon *_2 u)(x,y)=\int_{]0,1[}J_\varepsilon(y-z)u(x,z)\,\mathrm{d}z.$$

Comme l'ensemble $\{x/(x,z)\in D\}$ ne dépend pas de z, u_ε a pour dérivées partielles $\partial u_\varepsilon/\partial x=J_\varepsilon *_2(\partial u/\partial x)$ et $\partial u_\varepsilon/\partial y=J'_\varepsilon *_2 u$, et appartient à $H^1(D)$.

$$\|u_\varepsilon-u\|^2_{L^2(D,\mu)}=\int_{]0,1[}\|J_\varepsilon*u(x,\cdot)-u(x,\cdot)\|^2_{L^2(]0,1[,\mathrm{d}y)}\,\mathrm{d}x,$$

et pour presque tout x de]0,1[, l'appartenance de $u(x,\cdot)$ à $L^2(]0,1[,\mathrm{d}y)$ assure que $\|J_\varepsilon*u(x,\cdot)-u(x,\cdot)\|^2_{L^2(]0,1[,\mathrm{d}y)}$ tend vers 0 quand ε tend vers 0 et est majorée par $2\ \|u(x,\cdot)\|^2_{L^2(]0,1[,\mathrm{d}y)}$ qui est intégrable. En utilisant le théorème de convergence dominée, on obtient que

$$\|u_\varepsilon-u\|^2_{L^2(D,\mu)}\xrightarrow[\varepsilon\to0]{L^2(D,\mu)}0.$$

Enfin, de la même façon que pour u, on montre que $\sigma\nabla u_\varepsilon=\partial u_\varepsilon/\partial x$ converge dans $L^2(D,\mu)$ vers $\sigma\nabla u=\partial u/\partial x$ puisque $\partial u/\partial x$ est élément de $L^2(D,\mu)$.

La famille $(J_\varepsilon *_2 u)_{\varepsilon>0}$ est donc une famille d'éléments de $H^1(D)$ qui converge quand $\varepsilon \to 0$ vers u dans $H(D, \mu, a\mu)$. □

REMARQUE 7.5. Cette démonstration se généralise sans peine au cas où $D = D' \times D''$, avec D' et D'' des ouverts de $\mathbb{R}^r$ et $\mathbb{R}^{d-r}$, et

$$a = \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

avec a' matrice $r \times r$ uniformément elliptique sur D'.

Bibliographie

1. Adams, R. A.: *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
2. Albeverio, S. and Röckner, M.: Classical Dirichlet forms on topological vector spaces – the construction of the associated diffusion process, *Probab. Theory Relat. Fields* **83** (1989), 405–434.
3. Bass, R. F. and Hsu, P.: The semimartingale structure of reflecting Brownian motion, *Proc. Amer. Math. Soc.* **108** (1990), 1007–1010.
4. Bass, R. F. and Hsu, P.: Some potential theory for reflecting Brownian motion in Hölder and Lipschitz domains, *Ann. Prob.* **19** (1991), 486–508.
5. Billingsley, P.: *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York, 1969.
6. Blumenthal, R. M. and Getoor, R. K.: *Markov Processes and Potential Theory*, Academic Press, New York, 1968.
7. Cattiaux, P. and Fradon, M.: Entropy, reversible diffusion processes and Markov uniqueness, *J. Funct. Anal.* **138** (1996), 243–272.
8. Cattiaux, P. and Léonard, C.: Minimization of the Kullback information of diffusion processes, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **30**(1) (1994), 83–132, and correction *Ann. Inst. Henri Poincaré* (1995).
9. Cattiaux, P. and Léonard, C.: Large deviations and Nelson processes, *Forum Math.* **7** (1995), 95–115.
10. Chen, Z. Q.: On reflecting diffusions processes and Skorokhod decomposition, *Probab. Theory Relat. Fields* **94** (1993), 281–315.
11. Chen, Z. Q., Fitzsimmons, P. J. and Williams, R. J.: Reflecting brownian motions: Quasi-martingales and strong caccioppoli sets, *Potential Anal.* **2** (1993), 219–243.
12. Fradon, M.: *Diffusions dégénérées, réfléchie ou à dérives singulières: étude des lois et des formes de dirichlet associées.* PhD Thesis, 1995.
13. Fukushima, M.: A construction of reflecting barrier Brownian motions for bounded domains, *Osaka J. Math.* **4** (1967), 183–215.
14. Fukushima, M.: *Dirichlet Forms and Markov Processes*, Kodansha North-Holland, Amsterdam, 1980.
15. Fukushima, M., Oshima, and Takeda, M.: *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, Studies in Mathematics 19. De Gruyter, Berlin, 1994.
16. Hörmander, L.: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators II*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
17. Ikeda, N. and Watanabe, S.: *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland, Amsterdam, 2nd edition, 1988.
18. Jacod, J. and Shiryaev, A. N.: *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
19. Kurtz, T. G. and Protter, P.: Weak limit theorems for stochastic integrals and stochastic differential equations, *Ann. Prob.* **19** (1991), 1035–1070.
20. Lions, P. L. and Sznitman, A. S.: Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions, *Comm. Pure Appl. Math.* **37** (1984), 511–537.

21. Lyons, T. J. and Zheng, W. A.: A crossing estimate for the canonical process on a Dirichlet space and a tightness result, *Asterisque* **157**–**158** (1988), 249–271.
22. Meyer, P. A. and Zheng, W. A.: Tightness criteria for laws of semimartingales, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **20** (1984), 353–372.
23. Pardoux, E. and Williams, R. J.: Symmetric reflected diffusion, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **30** (1994), 13–62.
24. Sharpe, M. J.: *General Theory of Markov Processes*, Academic Press, London, 1988.
25. Silverstein, M. L.: Boundary theory of symmetric Markov processes, *Lect. Notes Math. 516*, 1976.
26. Stein, E. M.: *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, 1970.
27. Stroock, D. W. and Varadhan, S. R. S.: Diffusions processes with boundary conditions, *Comm. Pure Appl. Math.* **24** (1971), 147–225.
28. Tanaka, H.: Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions in convex regions, *Hiroshima Math. J.* **9** (1979), 163–177.
29. Williams, R. J. and Zheng, W. A.: On reflecting Brownian motion – a weak convergence approach, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **26**(3) (1990), 461–488.