

Smileys bien tassés. Collège Carnot de Lille
Maths en Jeans 2017

Participations : Mme DANIEL (professeur au collège Carnot de Lille)
Mme FRADON (chercheuse à l'université Lille 1)

Elèves de 4^{ème} du collège Carnot de Lille
Soizic MAYER
Marylou MADEJ
Noah RIMOND
Romain ASTORI
Juliette BENADOUCHE
Fouâd DJALLAL

I Sujet:

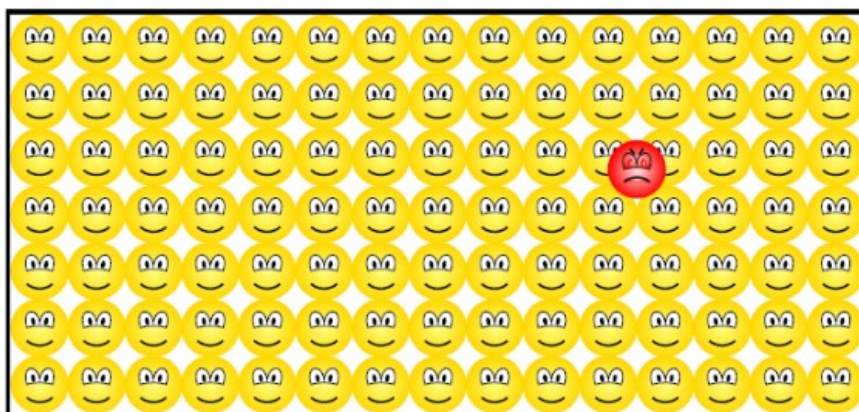
Comment mettre un maximum de smileys dans un minimum de place ?

Un smiley c'est rond, c'est tout petit, et surtout c'est plat! Donc les smileys en boîte se mettent dans une grande boîte plate : un carré, un rectangle, etc.



Quel pourcentage de la surface peut-on couvrir avec des smileys?

Règles du jeu : 1. La boîte est grande et les smileys sont petits. Dans une boîte ronde à sa taille, un smiley recouvre 100 % de la surface, mais ce n'est pas du jeu!
2. On a pas le droit de superposer les smileys.



II Approche expérimentale :

Nous avons travaillé avec des jetons circulaires (jetons de poker et jetons de nain jaunes) avec différents rayons. Nous avons essayé de placer un maximum de smileys sur une feuille A4 et nous avons essayé de les organiser. Nous avons commencé par mettre les diagonales mais c'est un échec.

Voici nos résultats:

	Jetons de Nain jaune	Jetons de Pokers
Formation en Carré	66,41 % (234 jetons)	70,48 % (35 jetons)
Formation Triangulaire	71,80 % (253 jetons)	84,58 % (42 jetons)

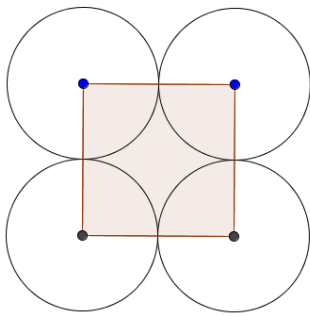
Formule utilisée pour les calculs du pourcentage de l'aire de la surface occupée par les jetons :

$$\frac{\text{Aire des jetons}}{\text{Aire A 4}} = \frac{\text{Nombre de jetons}}{21 \times 29,7} (\times 100)$$

III Démonstrations par pavage :

Nous avons trouvé deux formations possibles pour disposer les jetons

1) La formation « lignes et colonnes » (carrée)



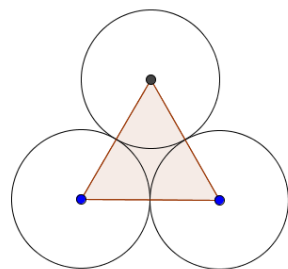
Pour la formation « lignes et colonnes » (carrée), les 4 centres des disques forment un carré.

On remarque que, quand on relie les centres de quatre disques ça forme un carré. Un côté du carré est égal à un diamètre. Dans un carré, il y a quatre quarts de disque. On en conclut donc que dans un carré il y a un disque entier.

$$\begin{aligned} \text{Proportion du} \\ \text{carré occupé} \\ \text{par le disque} \end{aligned} = \frac{\text{aire du disque de rayon } r}{\text{aire du carré de côté } 2r} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$$

(environ 78,5%)

2) La formation « triangulaire » (hexagonale)



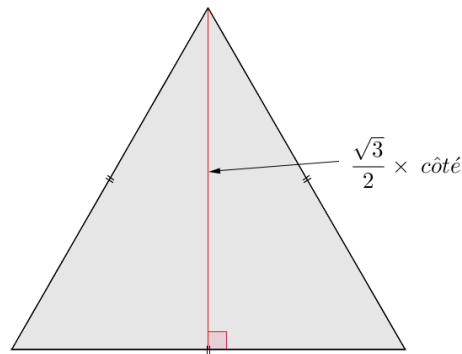
Pour la formation « triangulaire » (hexagonale), les 3 centres des disques forment un triangle équilatéral

Nous avons un triangle équilatéral dont les cotés sont un diamètre. On sait que les angles d'un triangle équilatéral sont égaux à 60°.

Donc dans le triangle équilatéral il y a trois sixièmes de cercle. On peut en conclure qu'il y a un $\frac{1}{2}$ disque dans le triangle équilatéral.

$$\text{Proportion occupée par le } \frac{1}{2} \text{ disque dans le triangle équilatéral} = \frac{\text{aire du } 1/2 \text{ disque}}{\text{aire du triangle équilatéral}}$$

Pour calculer l'aire du triangle équilatéral, nous avons besoin de sa hauteur ;



Notre chercheuse nous a aidé, elle nous a donné la formule pour la hauteur et l'a démontrée avec Pythagore

$$\text{aire du triangle} = \frac{d \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times d}{2} = \frac{2r \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2r}{2} = \sqrt{3} \times r^2$$

$$\frac{\text{aire du demi disque}}{\text{aire du triangle}} = \frac{\frac{1}{2} \times \pi \times r^2}{\sqrt{3} \times r^2} = \frac{1}{2 \times \sqrt{3}} \pi$$

(environ 91%)

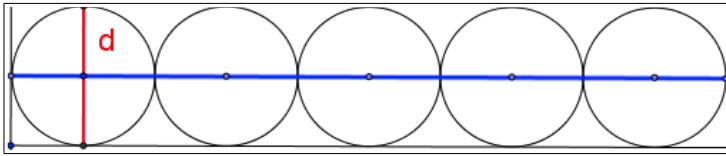
On remarque que $\frac{\pi}{4}$ est inférieur à $\frac{1}{2\sqrt{3}}\pi$ donc la proportion de l'espace occupé par un demi disque dans un triangle est supérieur à la proportion de l'espace occupé par un disque dans un carré.

IV Recherche de la feuille parfaite :

Les résultats trouvés confirment l'idée que la formation triangulaire est plus optimale que la formation lignes et colonnes, mais les résultats trouvés au début dans l'approche expérimentale ne sont pas tout à fait les mêmes car on n'a pas pris en compte les effets de bords.

Petit rappel : les effets de bords sont de la place perdue car la feuille utilisée ne s'adapte pas à la forme de l'empilement des jetons.

Pour éviter les effets de bords on doit chercher les dimensions de la feuille parfaite pour $n \times m$ jetons en formation triangulaire. (n et m sont des nombres entiers)

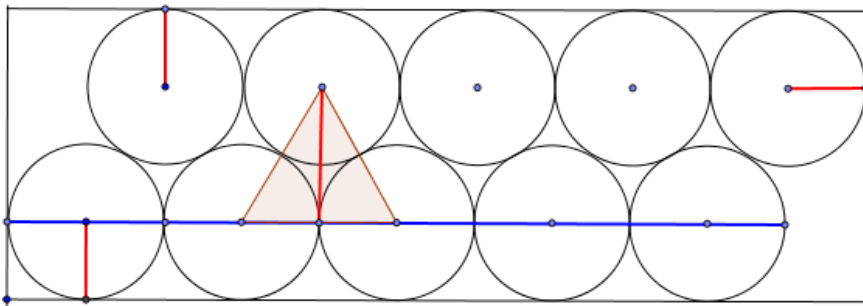


Par exemple pour $n=5$

$m=1$

dimensions: $5 \times \text{diamètre} = 5d$

$1 \times \text{diamètre} = d$

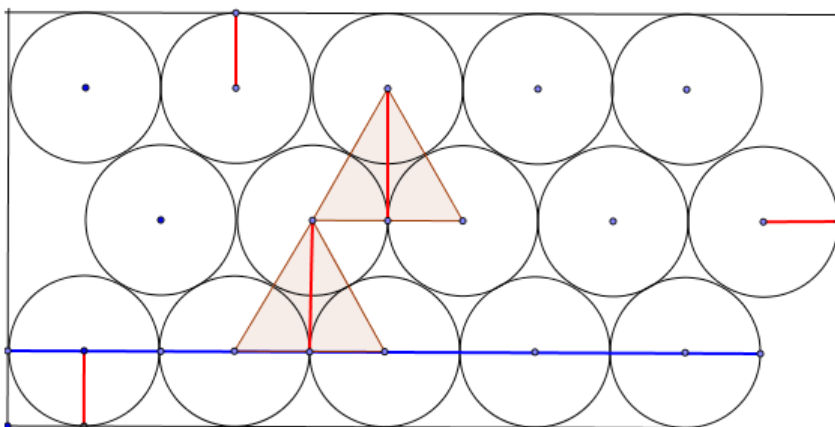


Par exemple pour $n=5$

$m=2$

dimensions: $5 \times \text{diamètre} + 1 \times \text{rayon} = 5,5d$

$1 \times \text{diamètre} + 1 \text{ hauteur} = d + h$

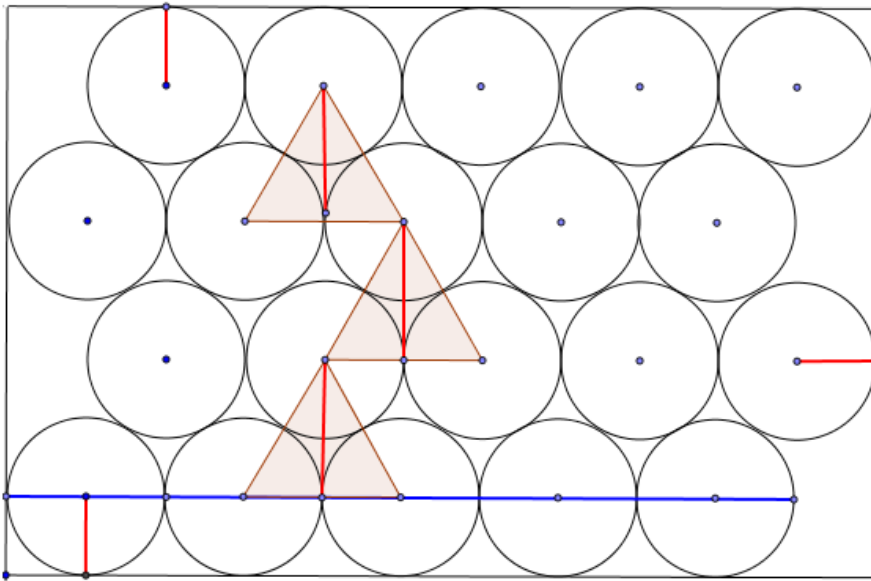


Par exemple pour $n=5$

$m=3$

dimensions: $5 \times \text{diamètre} + 1 \text{ rayon} = 5,5d$

$1 \times \text{diamètre} + 2 \times \text{hauteurs} = d + 2h$



Par exemple pour $n=5$

$m=4$

dimensions: $5 \times \text{diamètre} + 1 \times \text{rayon} = 5,5d$

$1 \times \text{diamètre} + 3 \times \text{hauteurs} = d + 3h$

conclusion :

nombre de jetons en hauteur	nombre en largeur	largeur de m jetons	hauteur
1	m	$m \times d$	d
2	m	$(m+0,5)d$	$d+h$
3	m	$(m+0,5)d$	$d+2h$
n	m	$(m+0,5)d$	$d+(n-1)h$

$$\frac{\text{aire des disques}}{\text{aire de la feuille}} = \frac{m \times n \times \pi \times r^2}{(m+0,5) \times d \times (d + (n-1) \times h)} \quad \text{en remplaçant } h \text{ par } \frac{\sqrt{3}}{2}d$$

$$= \frac{m \times n \times \pi \times r^2}{(m+0,5) \times d \times (d + (n-1) \times \frac{\sqrt{3}}{2}d)}$$

$$= \frac{m \times n \times \pi \times \frac{d^2}{4}}{(m+0,5) \times d \times d \times (1 + (n-1) \times \frac{\sqrt{3}}{2})} \quad \text{on simplifie par } \frac{d^2}{4}$$

$$= \frac{m \times n \times \pi}{(m+0,5) \times (1 + (n-1) \times \frac{\sqrt{3}}{2})}$$

$$= \frac{\pi}{\frac{(m+0,5)}{m} \times \frac{(1+(n-1) \times 2\sqrt{3})}{n}} \quad \text{on divise par m et par n}$$

$$= \frac{\pi}{(1+\frac{0,5}{m}) \times (\frac{1}{n} + (1-\frac{1}{n}) \times 2\sqrt{3})}$$

$$\approx \frac{\pi}{1 \times 1 \times 2\sqrt{3}}$$

Si les valeurs m et n sont très très grandes, on considère que les valeurs $\frac{0,5}{m}$ et $\frac{1}{n}$ sont très petites donc on va simplifier et on obtient $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ ce qui correspond au résultat de la proportion de l'aire du triangle occupé par le demi-disque.

Cette proportion ne dépend pas de la taille des jetons choisis.