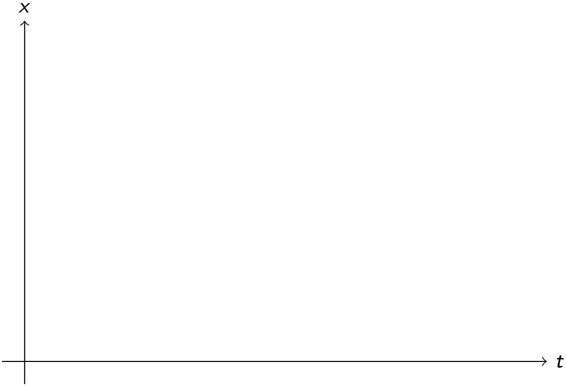
Formule d'Itô

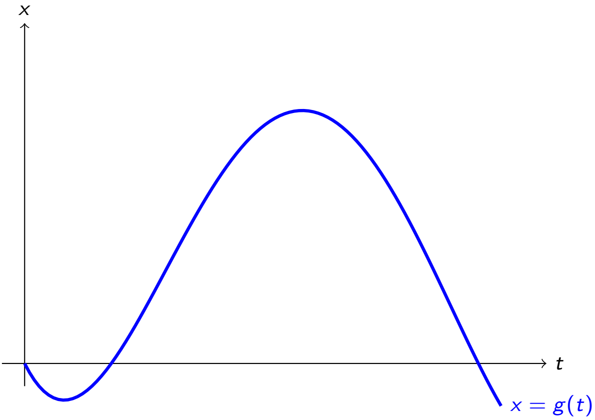
formule de dérivation des fonctions composées,
pour la composée d'une semi-martingale avec une fonction $\mathcal{C}^2$

Représentation graphique

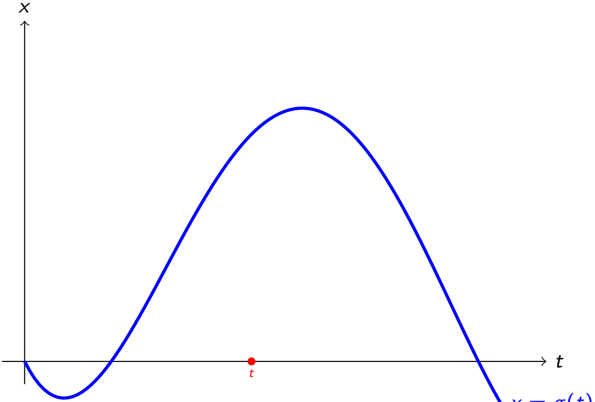
Cas où $g'(t)$ est presque constante à l'échelle de dt : Taylor ordre 1



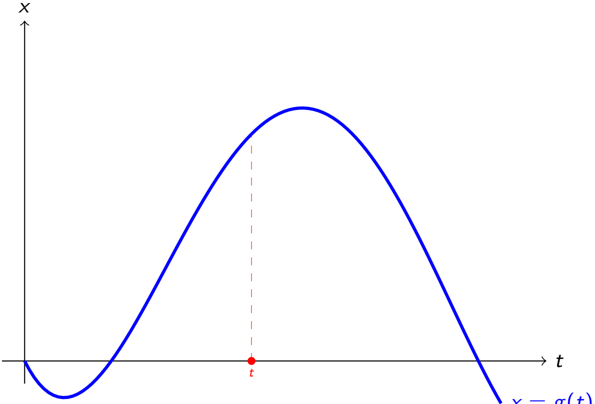
Cas où $g'(t)$ est presque constante à l'échelle de dt : Taylor ordre 1



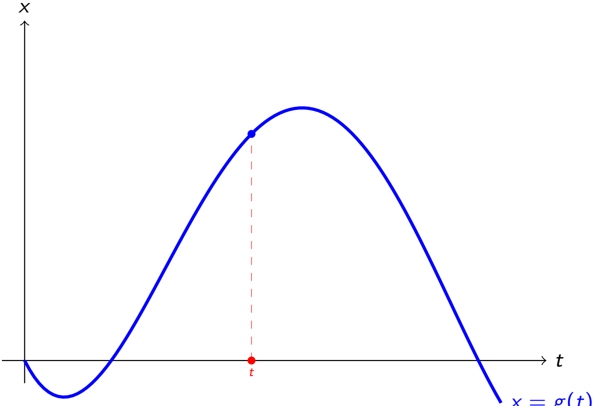
Cas où $g'(t)$ est presque constante à l'échelle de dt : Taylor ordre 1



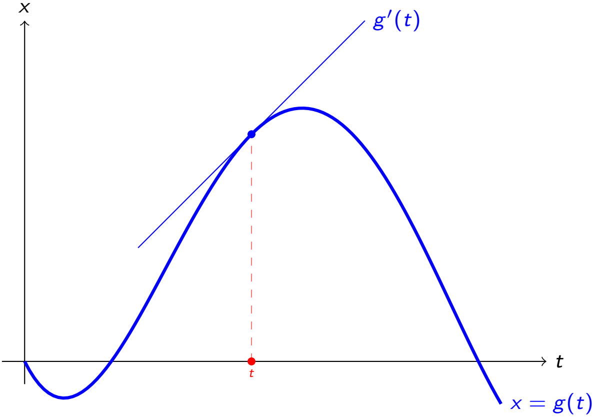
Cas où $g'(t)$ est presque constante à l'échelle de dt : Taylor ordre 1



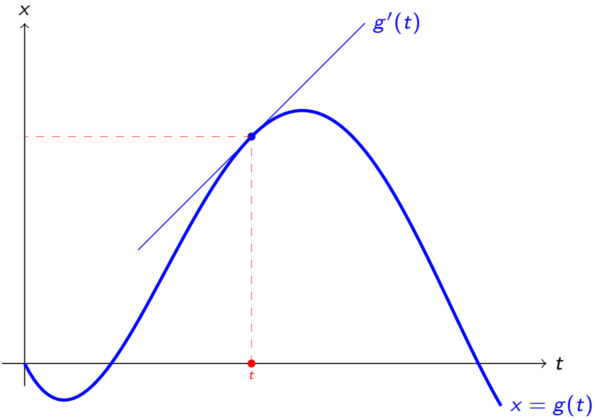
Cas où $g'(t)$ est presque constante à l'échelle de dt : Taylor ordre 1



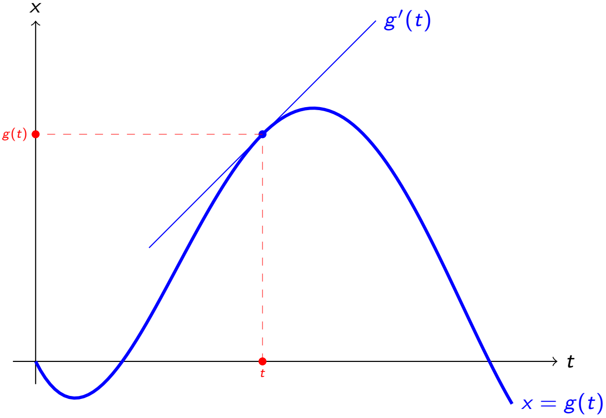
Cas où $g'(t)$ est presque constante à l'échelle de dt : Taylor ordre 1



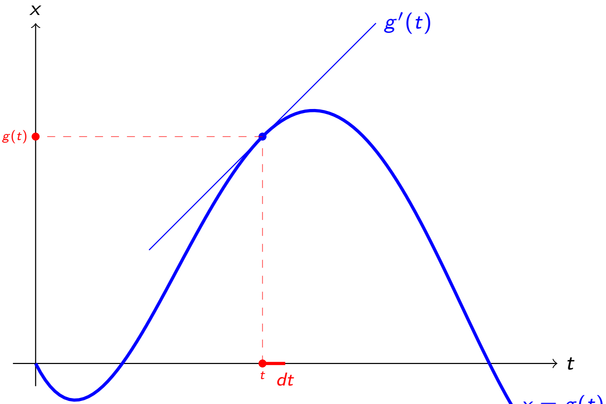
Cas où $g'(t)$ est presque constante à l'échelle de dt : Taylor ordre 1



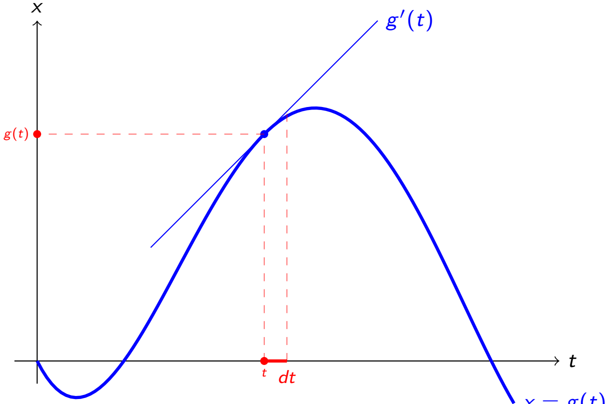
Cas où $g'(t)$ est presque constante à l'échelle de dt : Taylor ordre 1



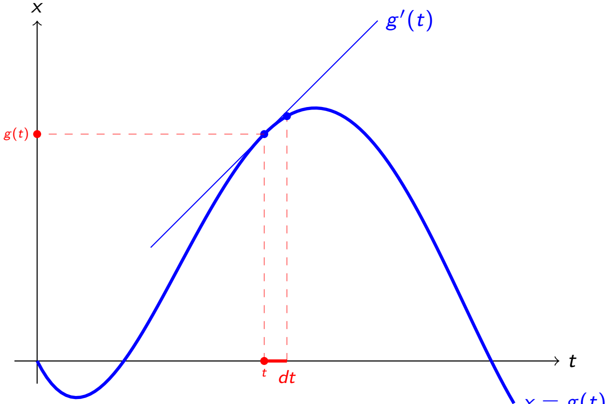
Cas où $g'(t)$ est presque constante à l'échelle de dt : Taylor ordre 1



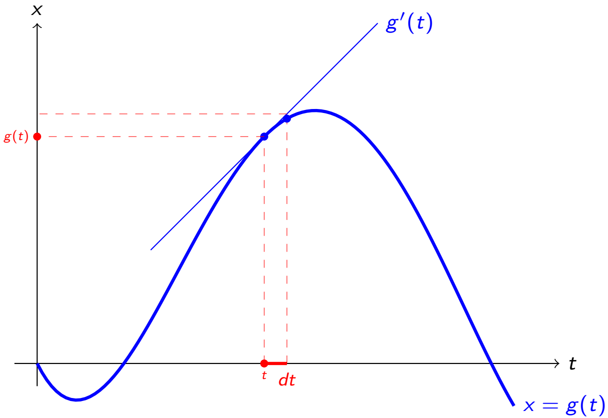
Cas où $g'(t)$ est presque constante à l'échelle de dt : Taylor ordre 1



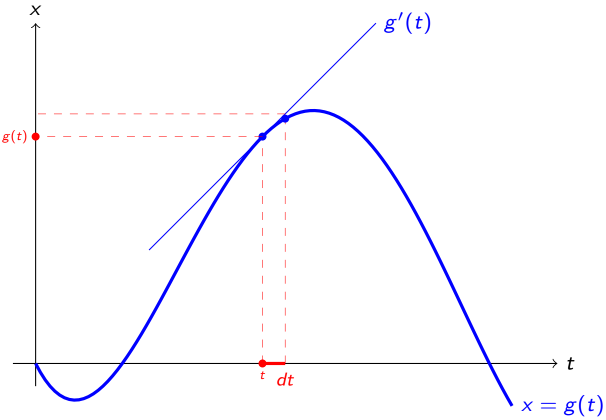
Cas où $g'(t)$ est presque constante à l'échelle de dt : Taylor ordre 1



Cas où $g'(t)$ est presque constante à l'échelle de dt : Taylor ordre 1

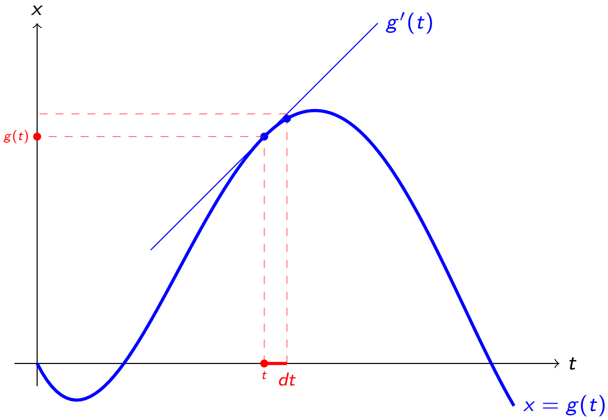


Cas où $g'(t)$ est presque constante à l'échelle de dt : Taylor ordre 1



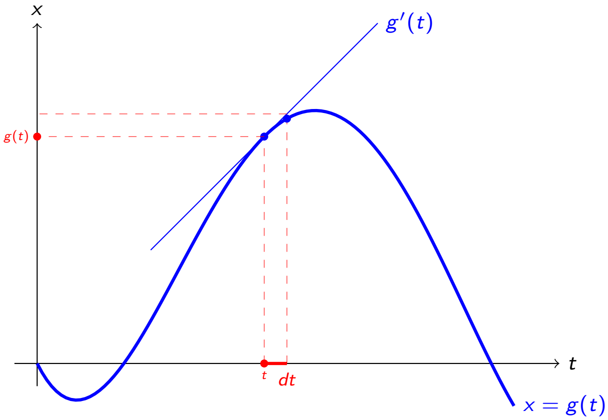
$$dx(t) = \; g(t+dt) - g(t)$$

Cas où $g'(t)$ est presque constante à l'échelle de dt : Taylor ordre 1



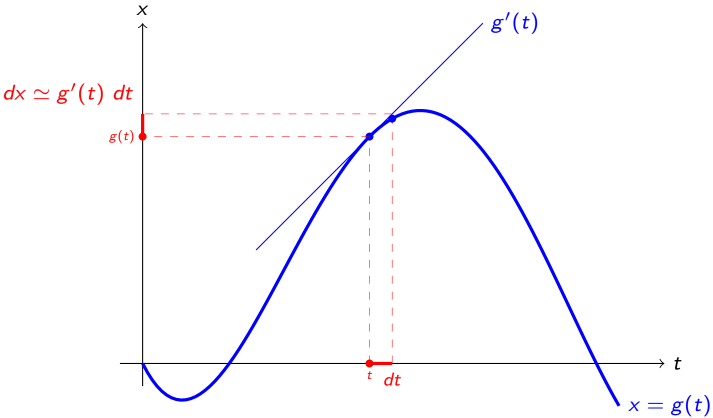
$$dx(t) = \; g(t+dt) - g(t) = \; \frac{g(t+dt) - g(t)}{dt} \; dt$$

Cas où $g'(t)$ est presque constante à l'échelle de dt : Taylor ordre 1



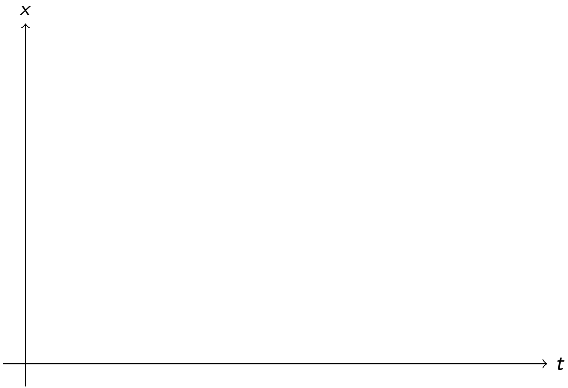
$$dx(t) = g(t+dt) - g(t) = \frac{g(t+dt) - g(t)}{dt}\, dt \simeq g'(t)\, dt$$

Cas où $g'(t)$ est presque constante à l'échelle de dt : Taylor ordre 1

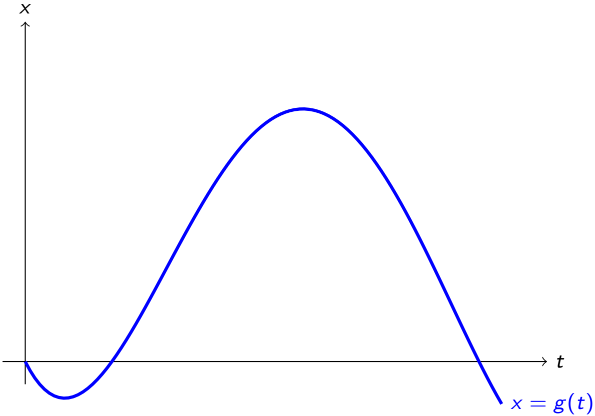


$$dx(t) = \ g(t+dt) - g(t) = \ \frac{g(t+dt)-g(t)}{dt}\ dt \simeq \ g'(t)\ dt$$

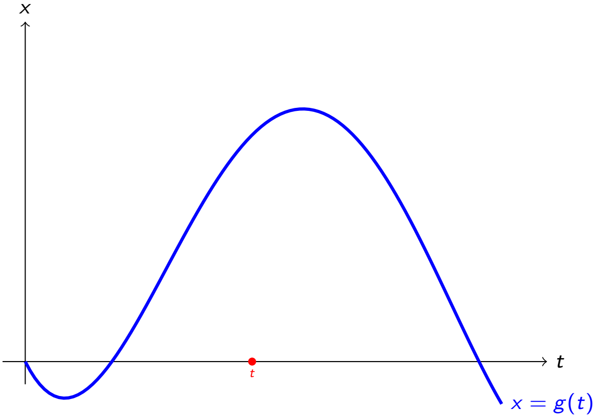
Cas où $g'(t)$ varie significativement à l'échelle de dt : Taylor ordre 2



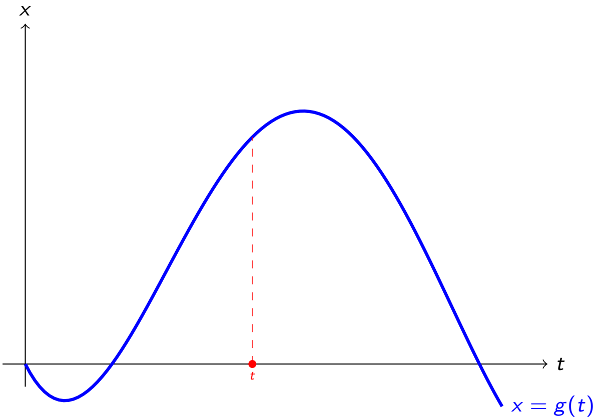
Cas où $g'(t)$ varie significativement à l'échelle de dt : Taylor ordre 2



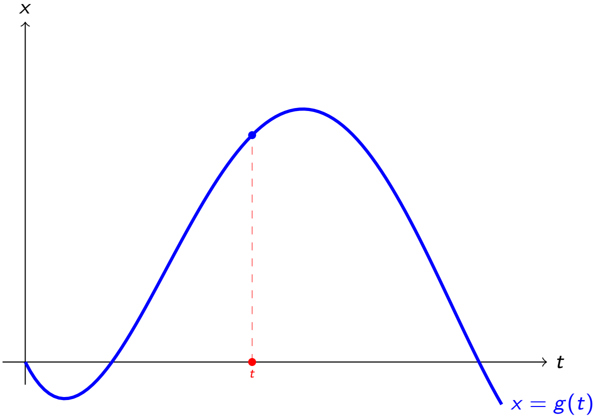
Cas où $g'(t)$ varie significativement à l'échelle de dt : Taylor ordre 2



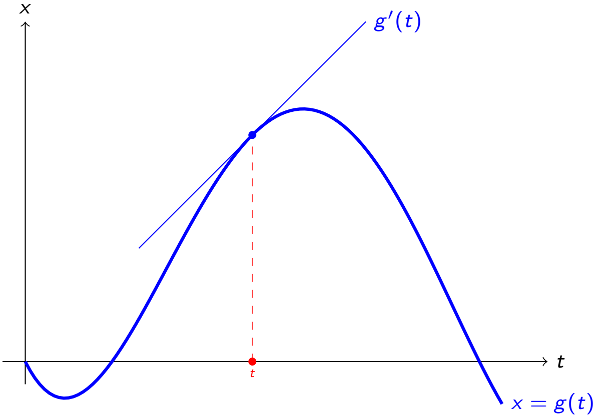
Cas où $g'(t)$ varie significativement à l'échelle de dt : Taylor ordre 2



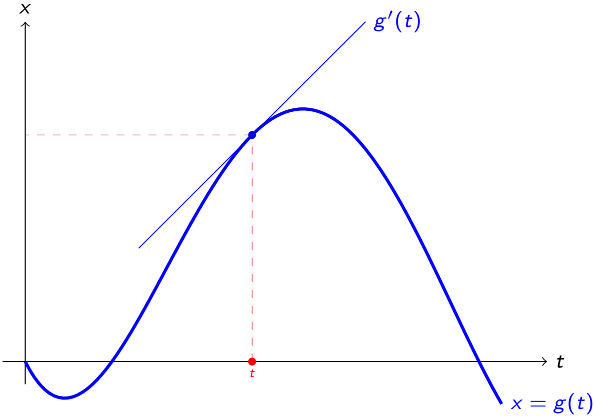
Cas où $g'(t)$ varie significativement à l'échelle de dt : Taylor ordre 2



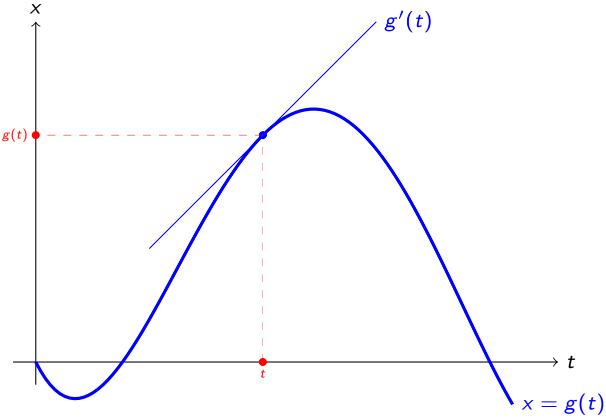
Cas où $g'(t)$ varie significativement à l'échelle de dt : Taylor ordre 2



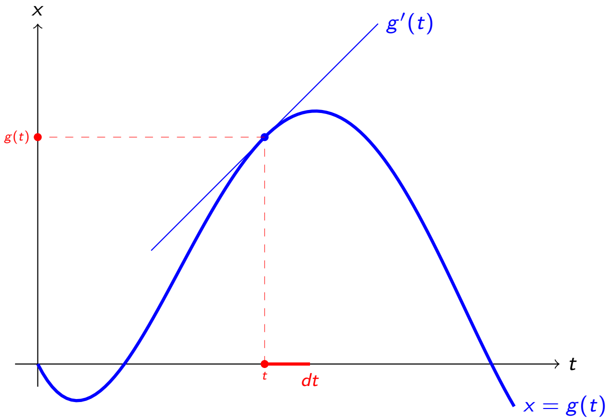
Cas où $g'(t)$ varie significativement à l'échelle de dt : Taylor ordre 2



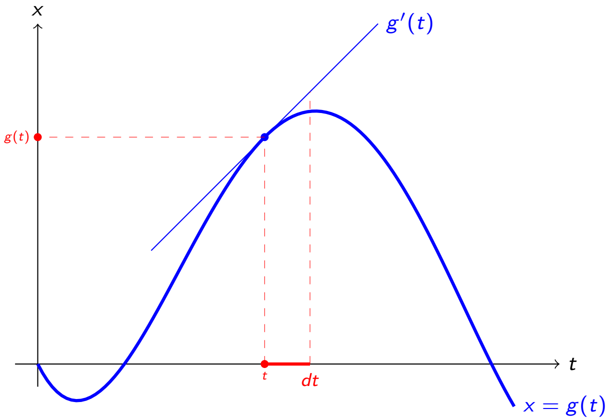
Cas où $g'(t)$ varie significativement à l'échelle de dt : Taylor ordre 2



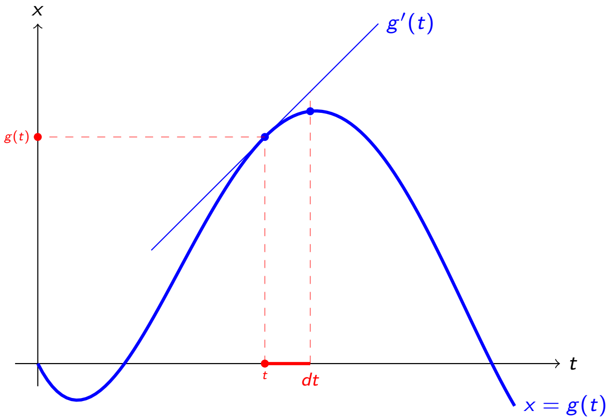
Cas où $g'(t)$ varie significativement à l'échelle de dt : Taylor ordre 2



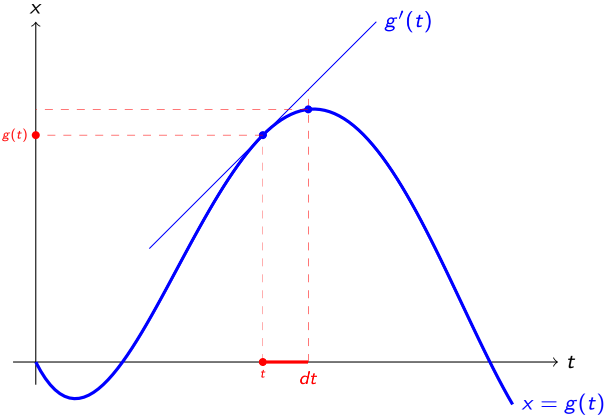
Cas où $g'(t)$ varie significativement à l'échelle de dt : Taylor ordre 2



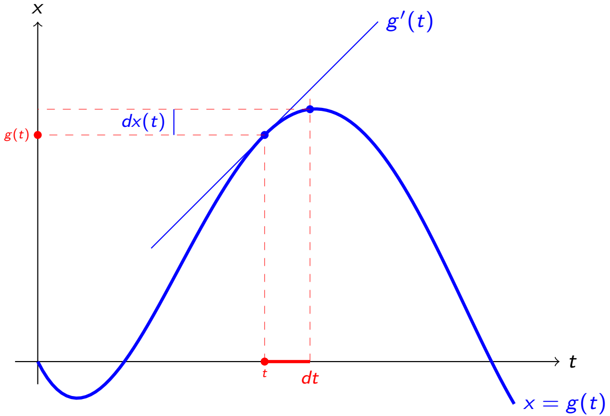
Cas où $g'(t)$ varie significativement à l'échelle de dt : Taylor ordre 2



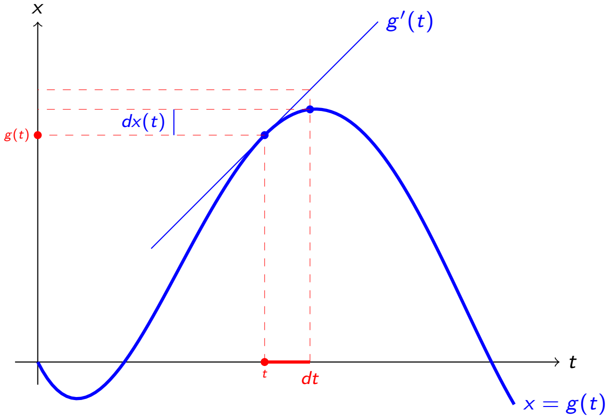
Cas où $g'(t)$ varie significativement à l'échelle de dt : Taylor ordre 2



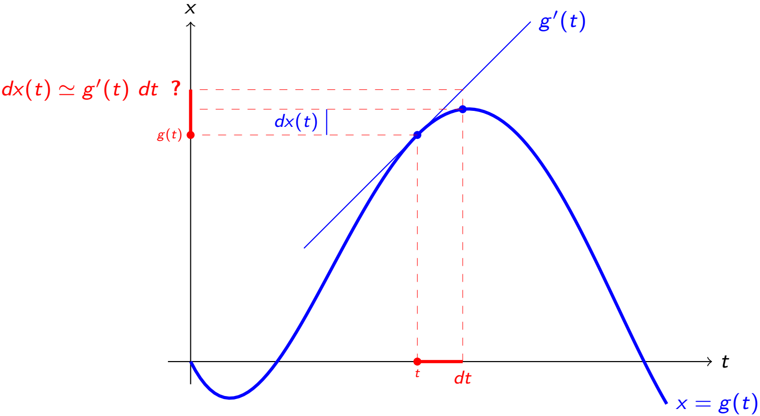
Cas où $g'(t)$ varie significativement à l'échelle de dt : Taylor ordre 2



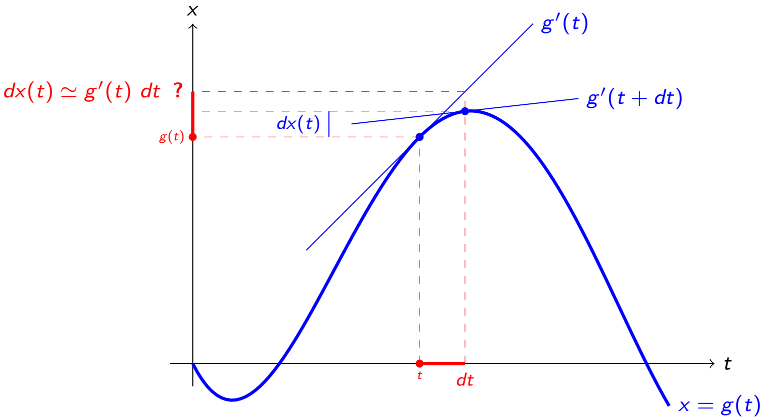
Cas où $g'(t)$ varie significativement à l'échelle de dt : Taylor ordre 2



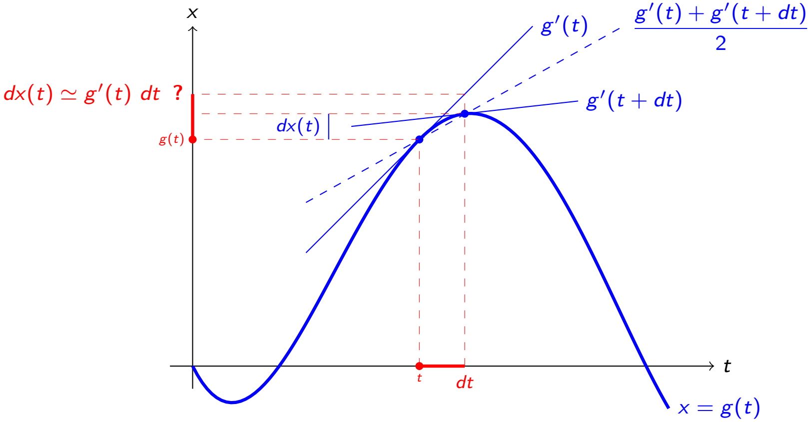
Cas où $g'(t)$ varie significativement à l'échelle de dt : Taylor ordre 2



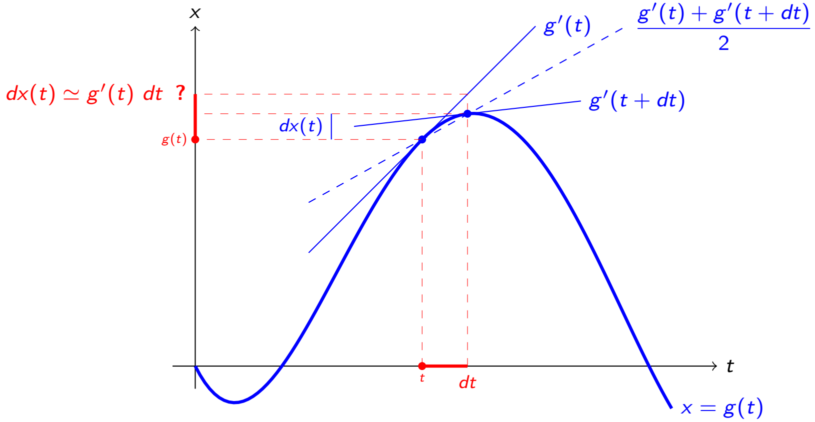
Cas où $g'(t)$ varie significativement à l'échelle de dt : Taylor ordre 2



Cas où $g'(t)$ varie significativement à l'échelle de dt : Taylor ordre 2

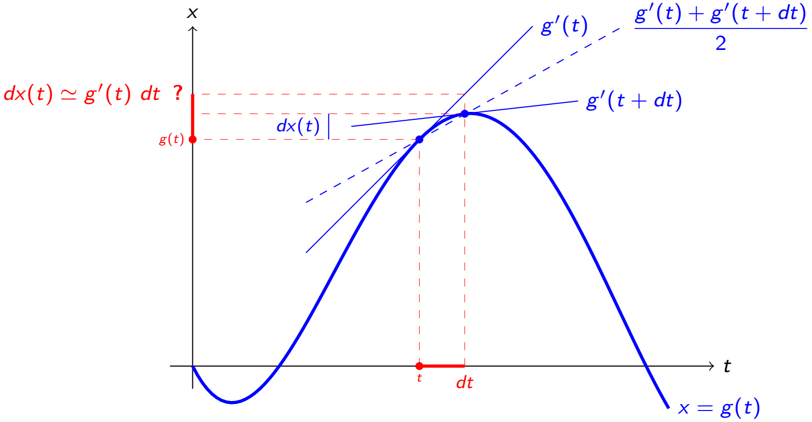


Cas où $g'(t)$ varie significativement à l'échelle de dt : Taylor ordre 2



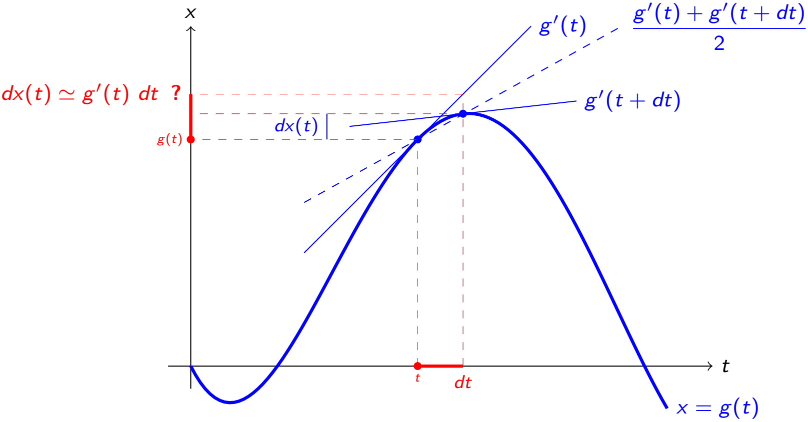
$$dx(t) \simeq \frac{g'(t)+g'(t+dt)}{2}\ dt$$

Cas où $g'(t)$ varie significativement à l'échelle de dt : Taylor ordre 2



$$dx(t) \simeq \frac{g'(t)+g'(t+dt)}{2}\ dt \ = \ \frac{2g'(t) \ + \ g'(t+dt)-g'(t)}{2}\ dt$$

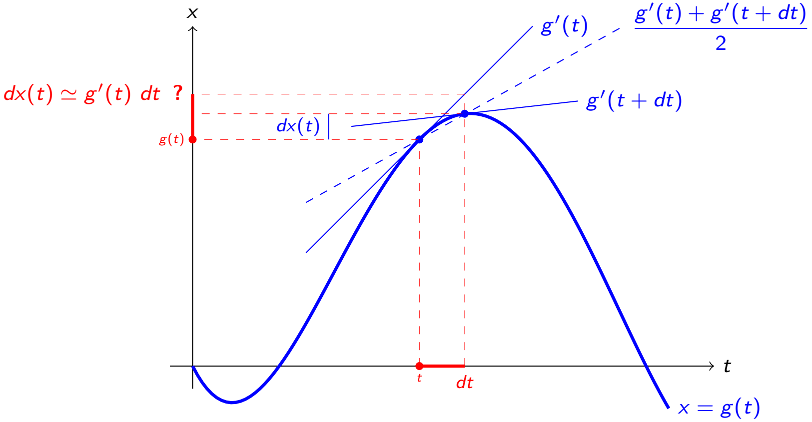
Cas où $g'(t)$ varie significativement à l'échelle de dt : Taylor ordre 2



$$dx(t) \simeq \frac{g'(t)+g'(t+dt)}{2}\ dt \ = \ \frac{2g'(t) \ + \ g'(t+dt)-g'(t)}{2}\ dt$$

$$= \ g'(t)\ dt + \frac{1}{2}\ \frac{g'(t+dt)-g'(t)}{dt}\ (dt)^2$$

Cas où $g'(t)$ varie significativement à l'échelle de dt : Taylor ordre 2

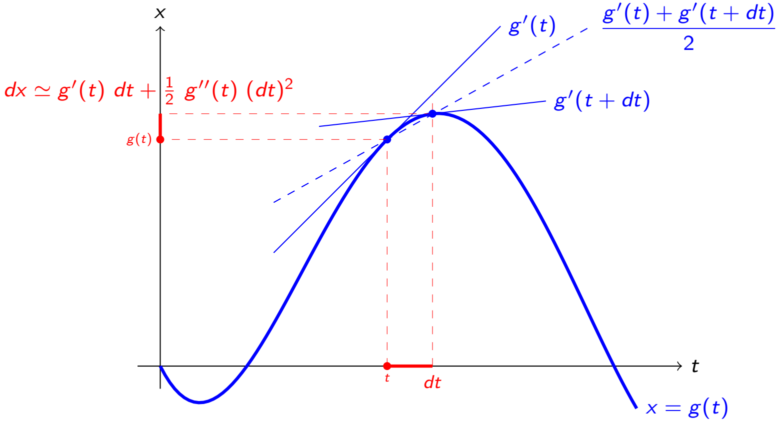


$$dx(t) \simeq \frac{g'(t)+g'(t+dt)}{2}\ dt \ = \ \frac{2g'(t) \ \ + \ \ g'(t+dt)-g'(t)}{2}\ dt$$

$$= \ g'(t)\ dt + \frac{1}{2}\ \frac{g'(t+dt)-g'(t)}{dt}\ (dt)^2$$

$$\simeq \ g'(t)\ dt + \frac{1}{2}\ g''(t)\ (dt)^2$$

Cas où $g'(t)$ varie significativement à l'échelle de dt : Taylor ordre 2

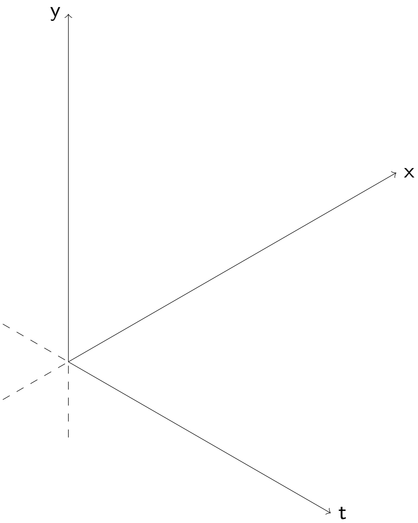


$$dx(t) \simeq \frac{g'(t)+g'(t+dt)}{2}\ dt = \frac{2g'(t) \quad + \quad g'(t+dt)-g'(t)}{2}\ dt$$

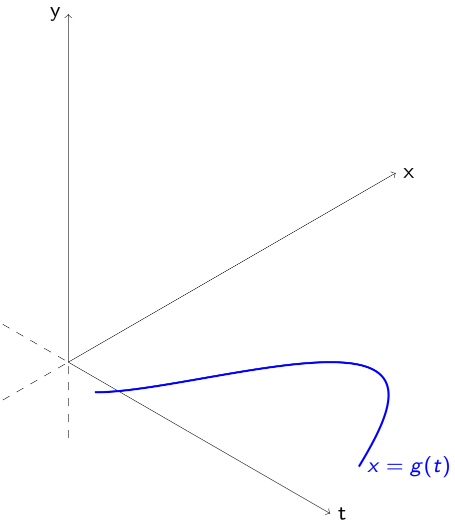
$$= g'(t)\ dt + \frac{1}{2}\ \frac{g'(t+dt)-g'(t)}{dt}\ (dt)^2$$

$$\simeq g'(t)\ dt + \frac{1}{2}\ g''(t)\ (dt)^2$$

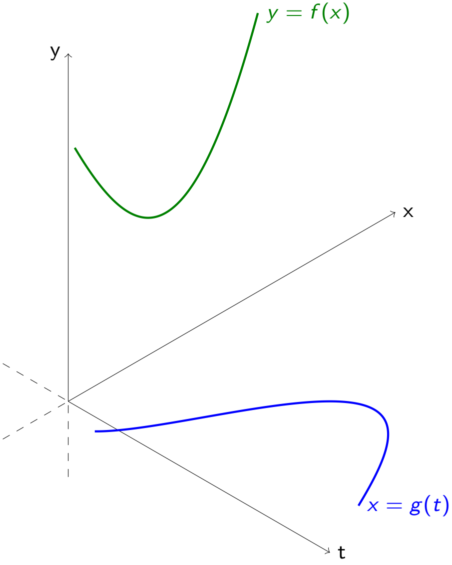
Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses



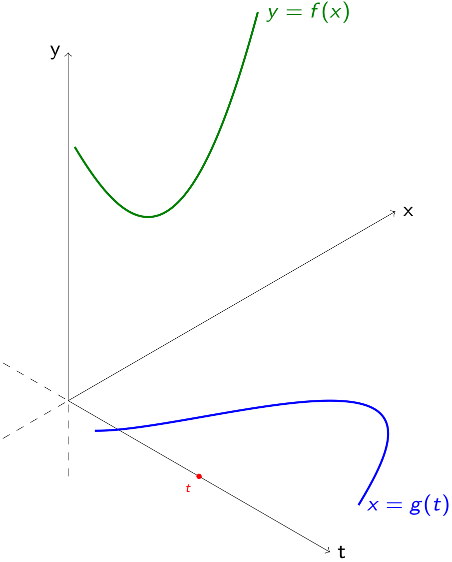
Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses



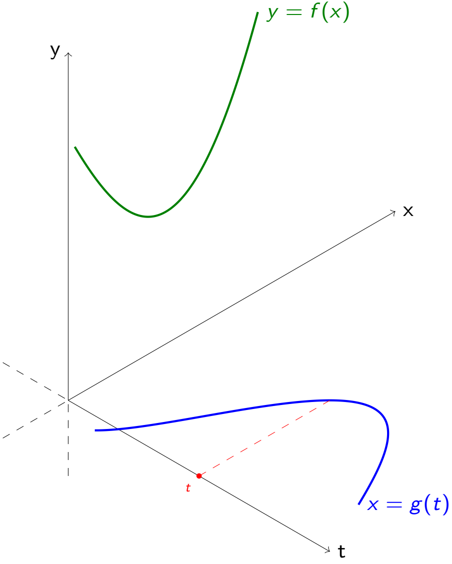
Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses



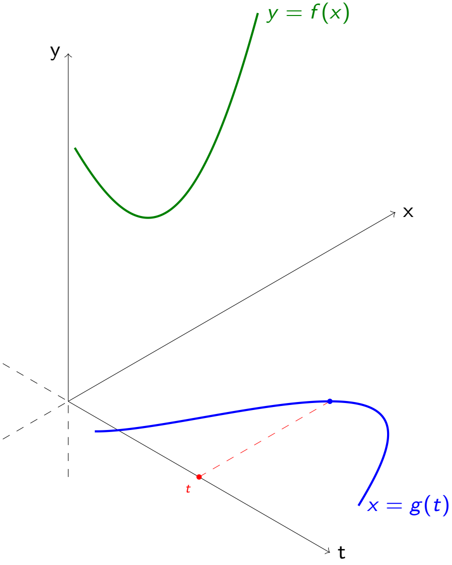
Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses



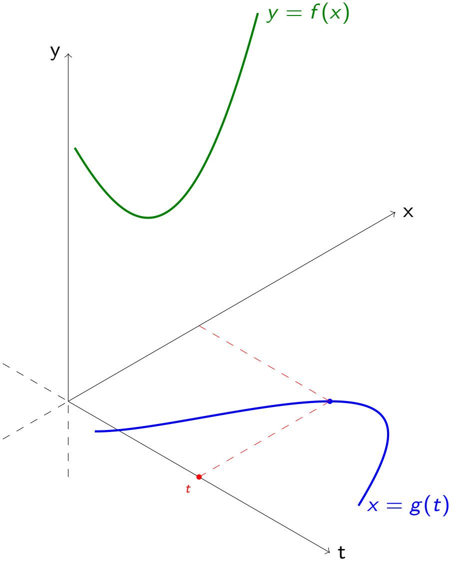
Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses



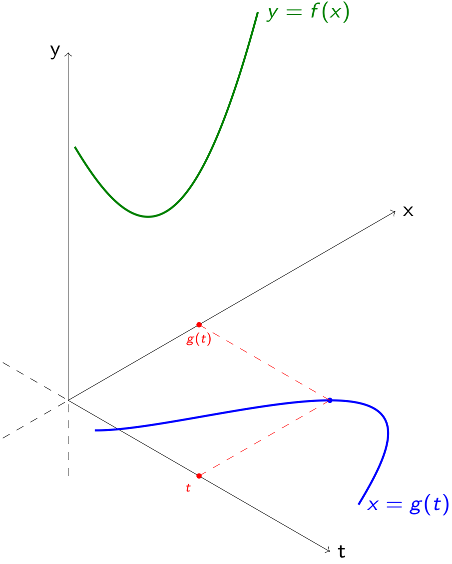
Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses



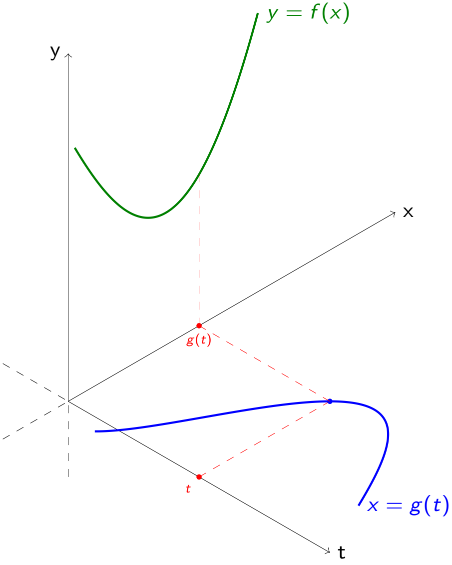
Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses



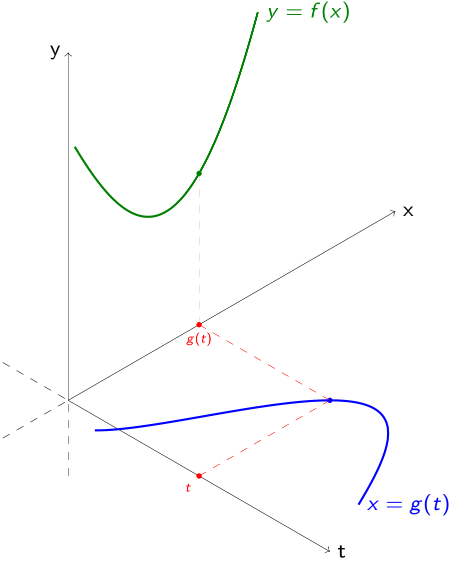
Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses



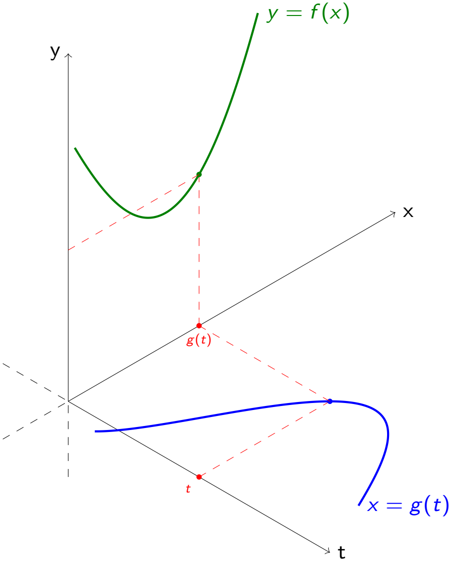
Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses



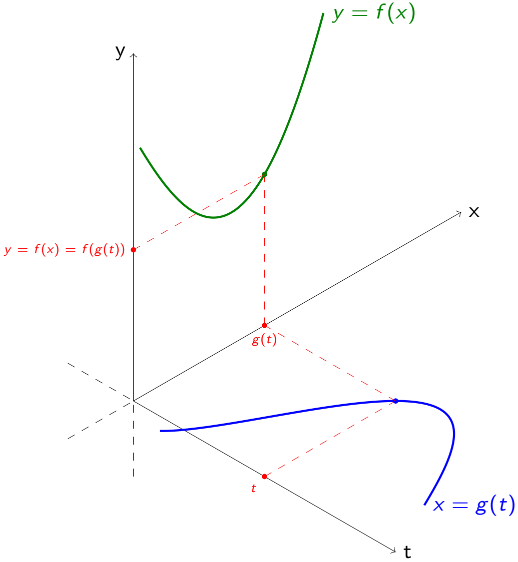
Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses



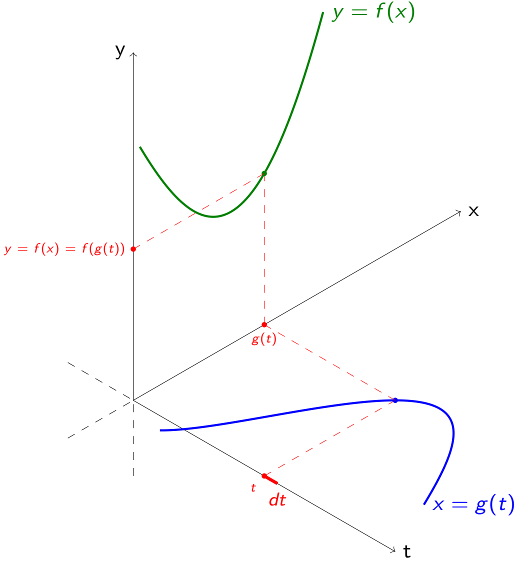
Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses



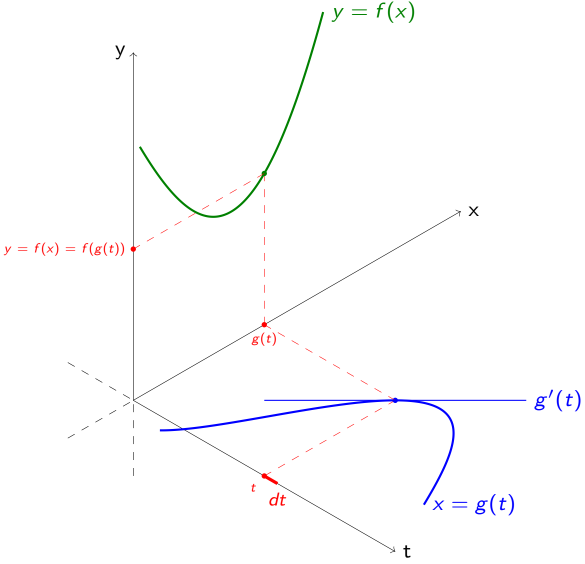
Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses



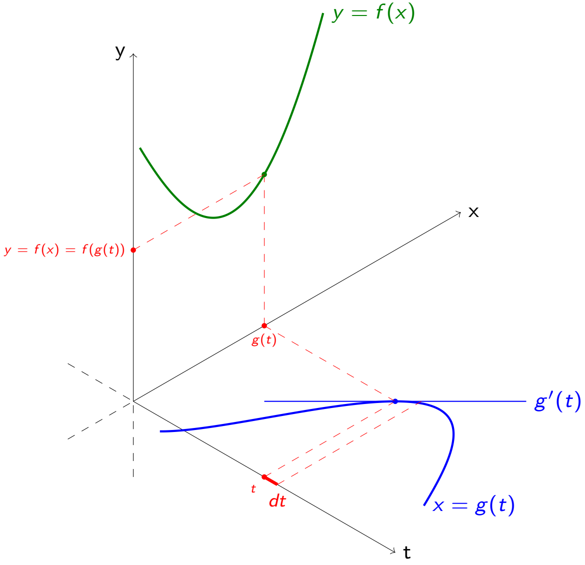
Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses



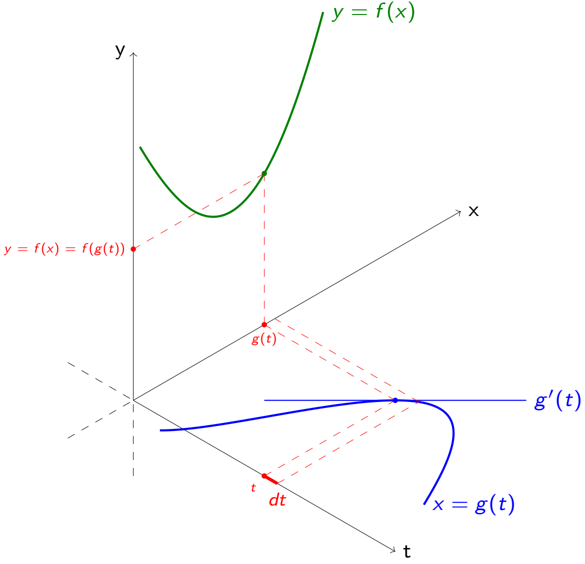
Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses



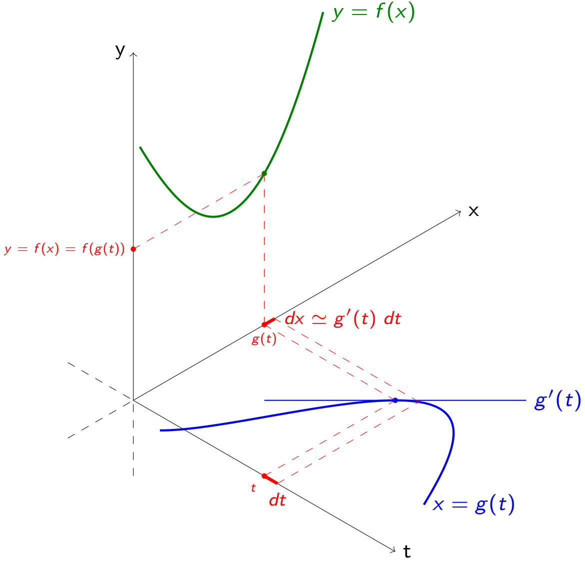
Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses



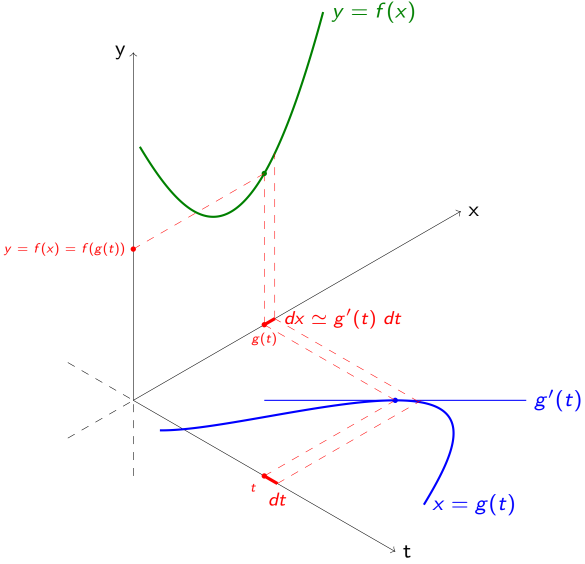
Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses



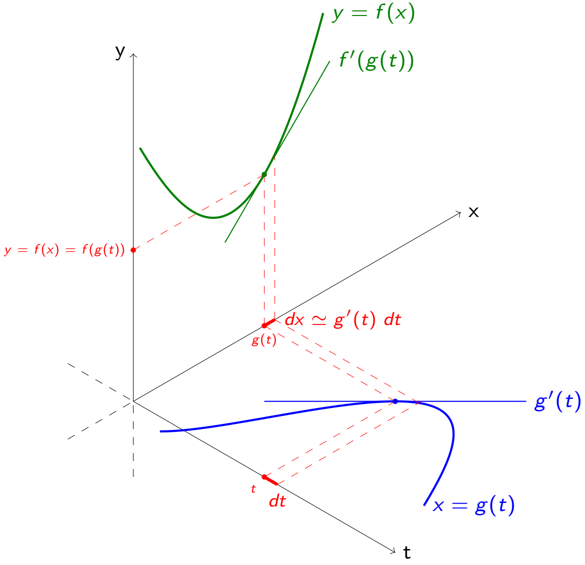
Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses



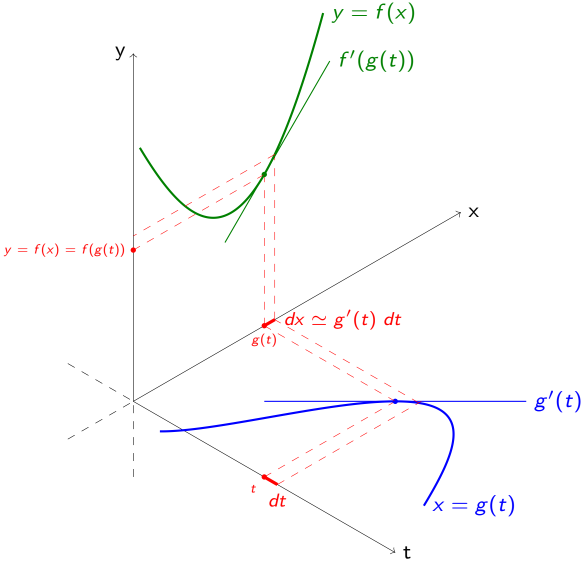
Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses



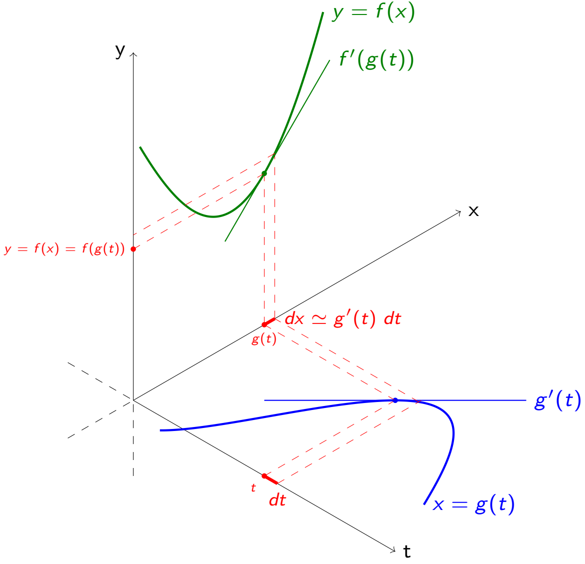
Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses



Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses

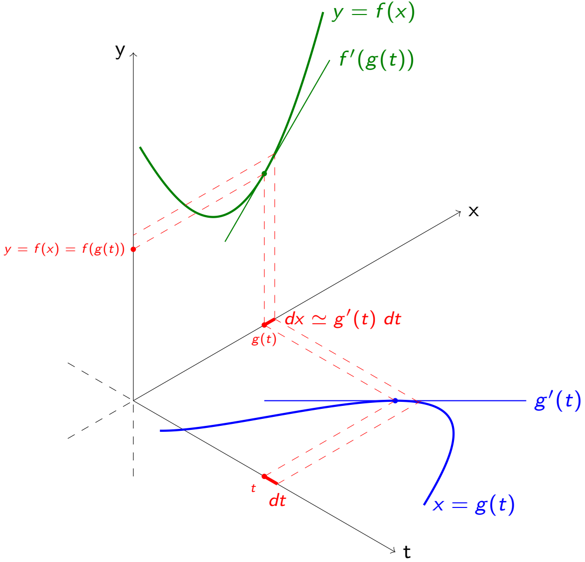


Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses



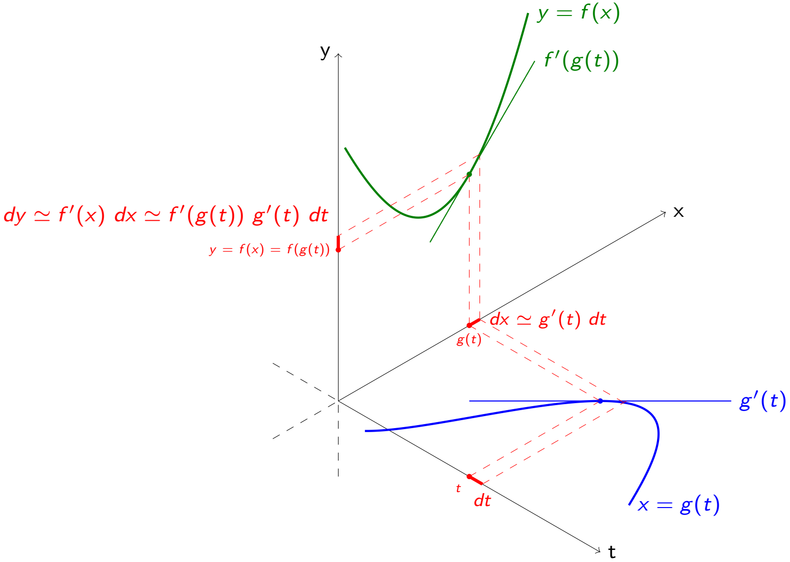
$$dy = d(f \circ g)(t) \simeq \ f'(g(t))\ dx$$

Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses



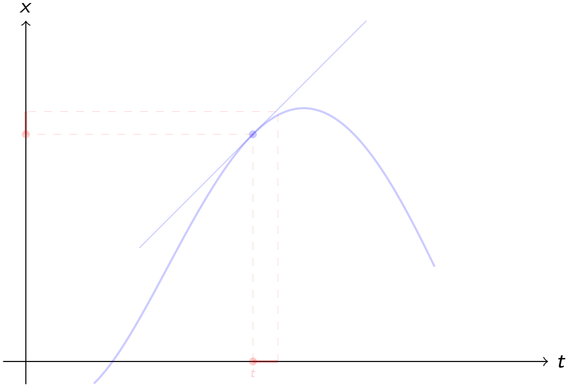
$$dy = d(f \circ g)(t) \simeq\ f'(g(t))\ dx \simeq\ f'(g(t))\ g'(t)\ dt$$

Dérivation des fonctions composées : deux fonctions lisses

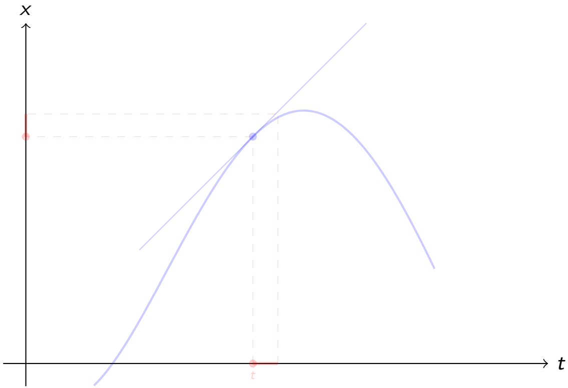


$$dy = d(f \circ g)(t) \simeq f'(g(t))\ dx \simeq f'(g(t))\ g'(t)\ dt$$

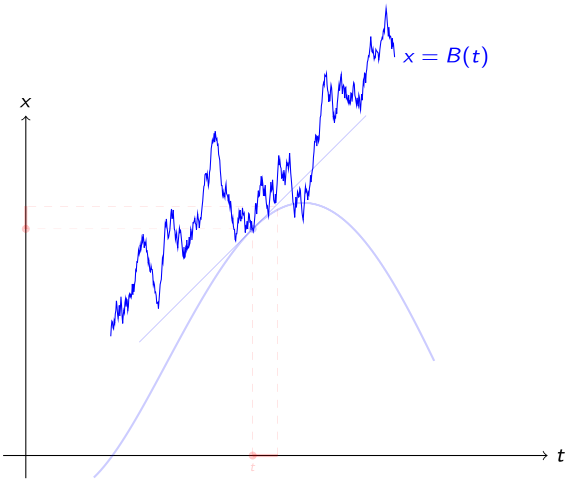
Incréments du brownien



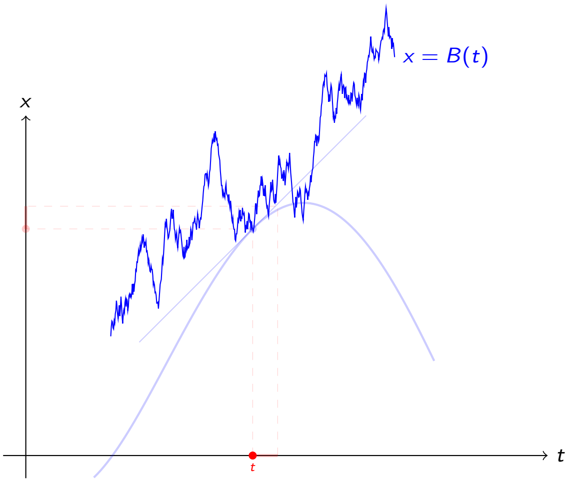
Incréments du brownien



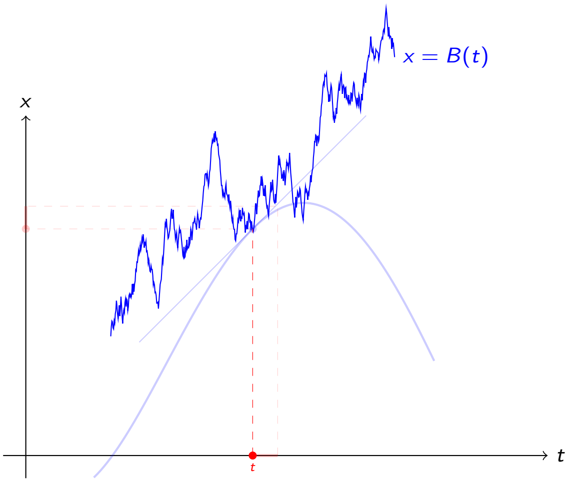
Incréments du brownien



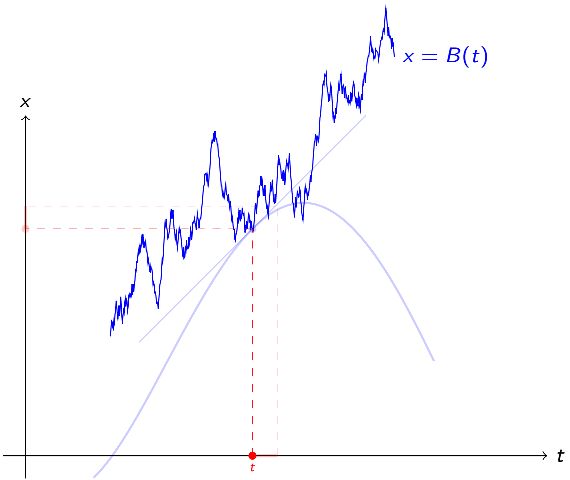
Incréments du brownien



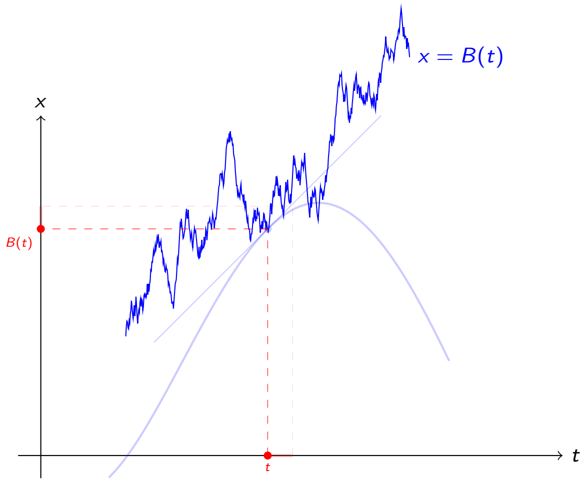
Incréments du brownien



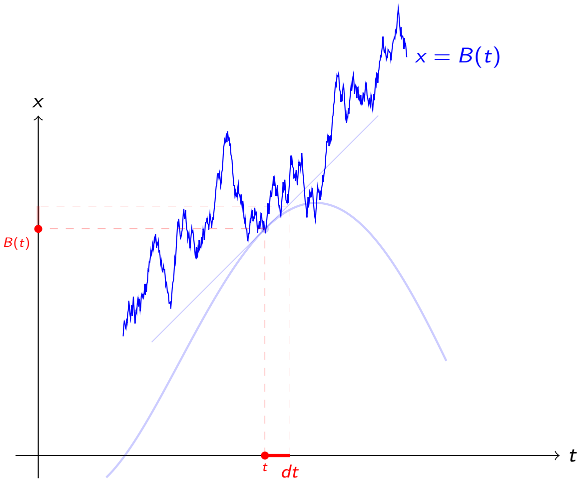
Incréments du brownien



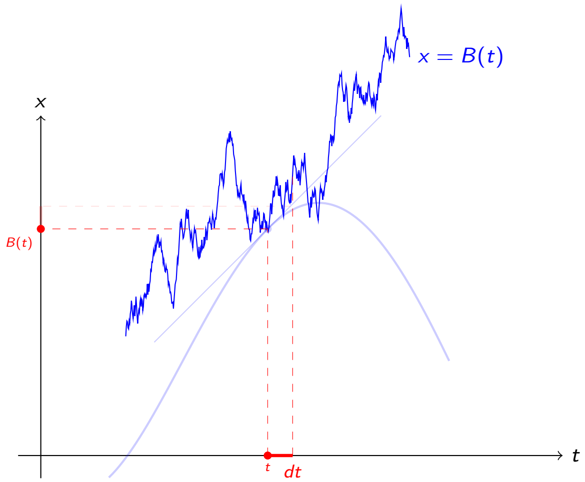
Incréments du brownien



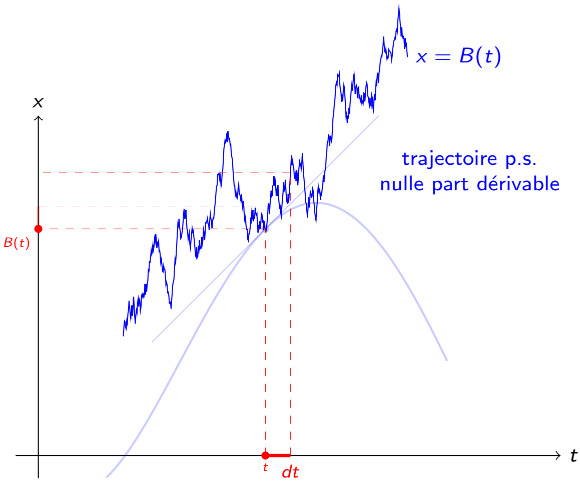
Incréments du brownien



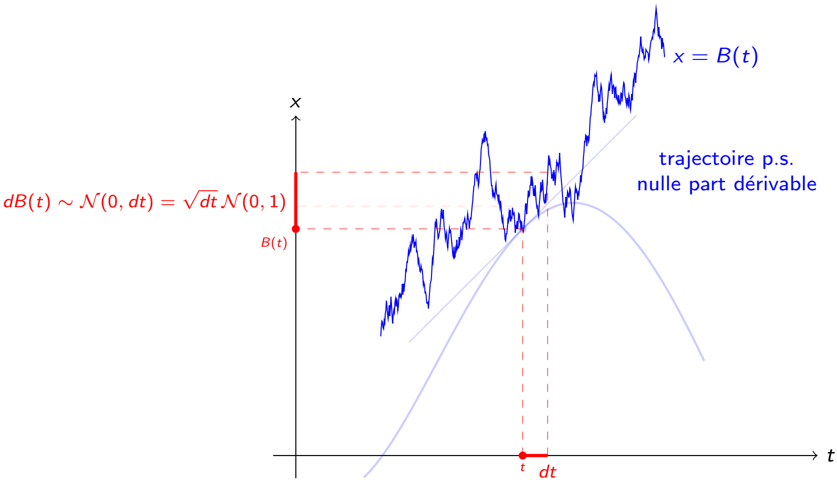
Incréments du brownien



Incréments du brownien

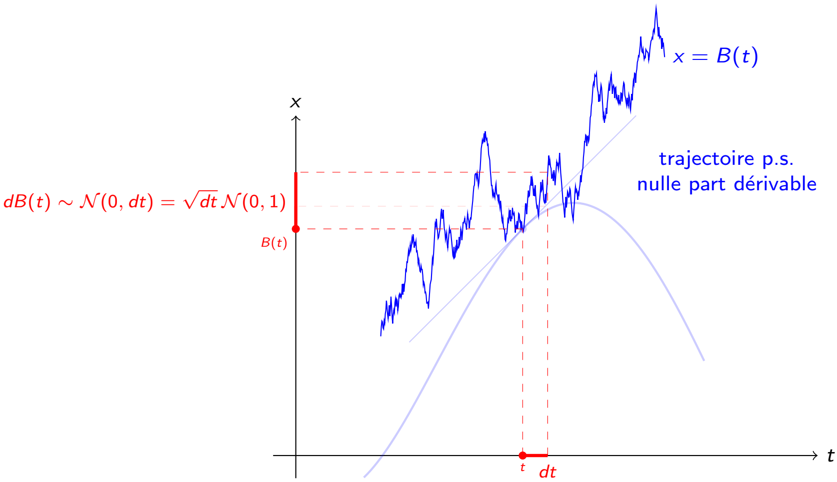


Incréments du brownien



$$dB(t) = B(t + dt) - B(t) \sim \mathcal{N}(0, dt) = \sqrt{dt}\mathcal{N}(0, 1)$$

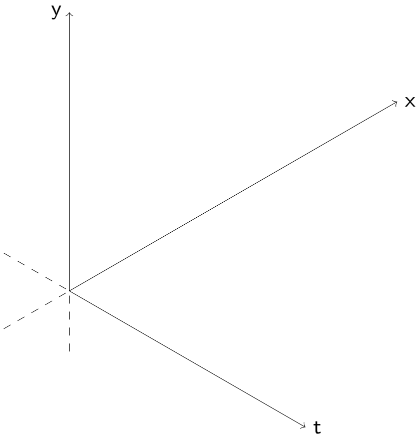
Incréments du brownien



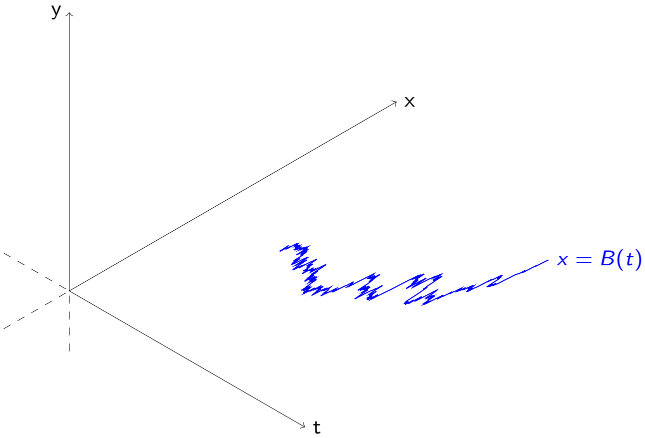
$$dB(t) = B(t + dt) - B(t) \sim \mathcal{N}(0, dt) = \sqrt{dt}\mathcal{N}(0, 1) >> dt$$

dt est très petit donc $\sqrt{dt}$ est **beaucoup plus grand** que dt.

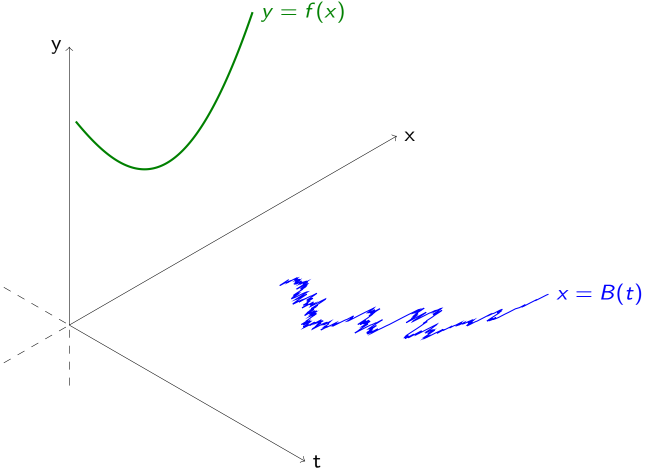
Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



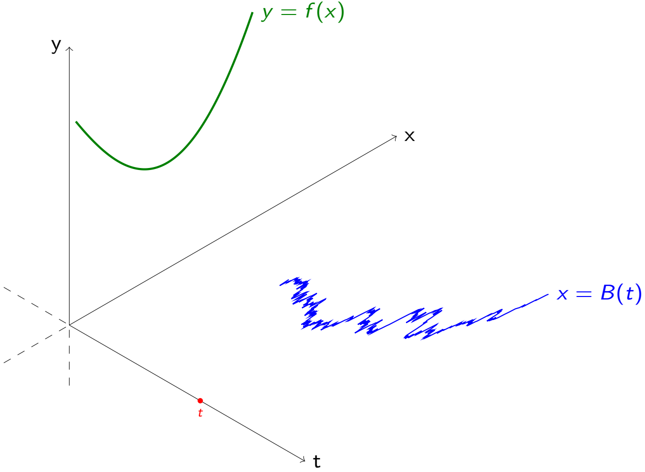
Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



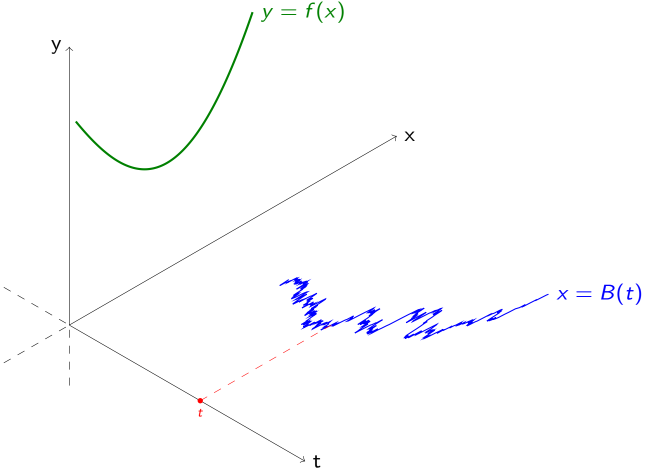
Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



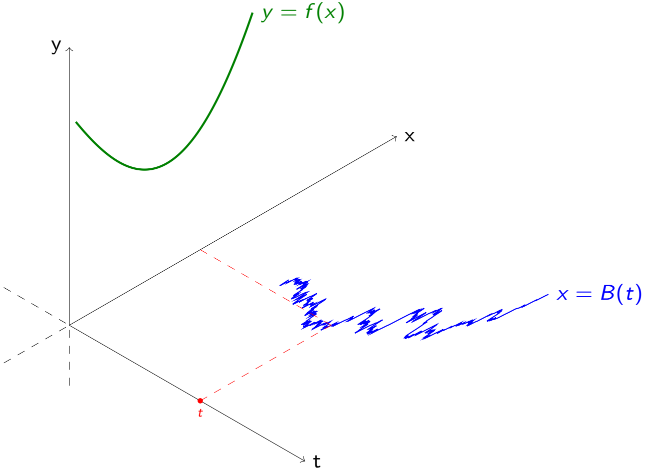
Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



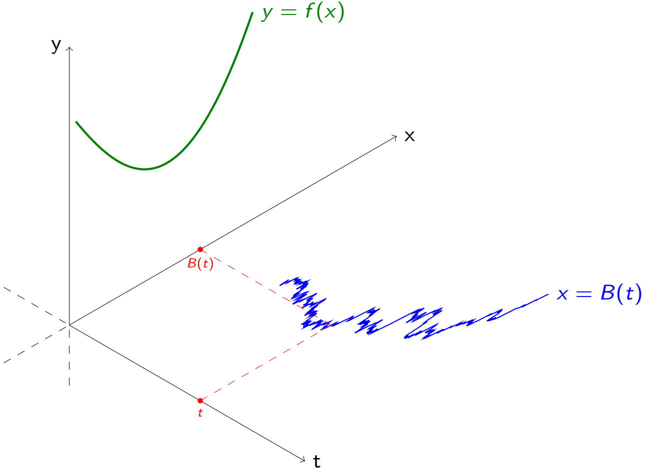
Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



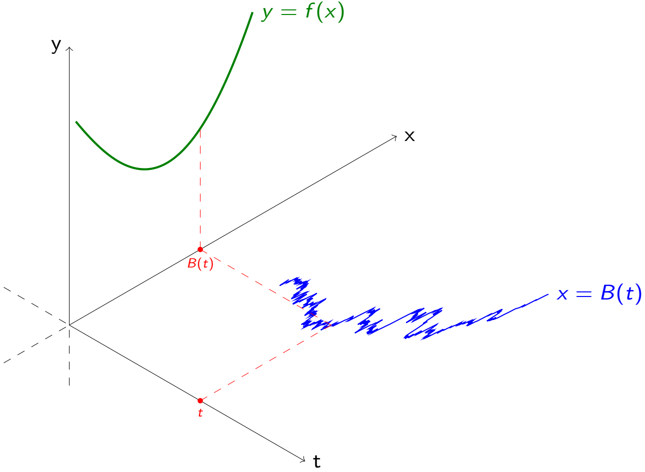
Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



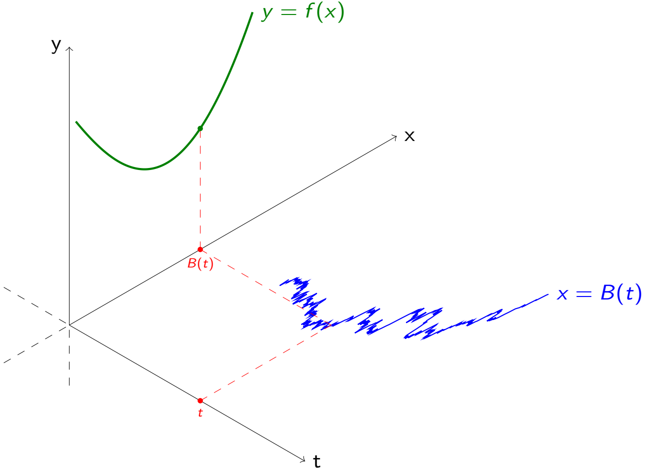
Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



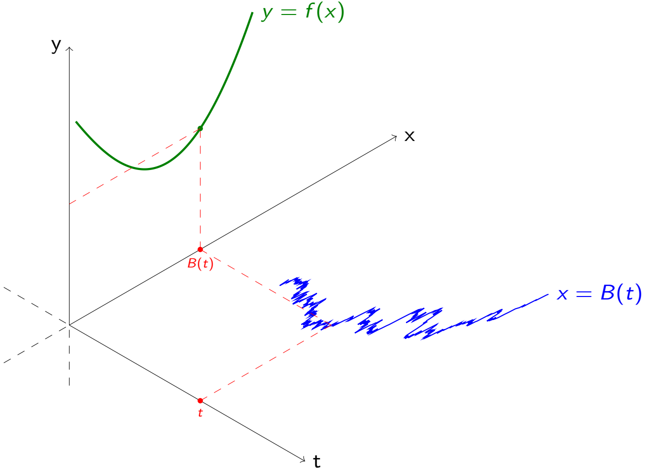
Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



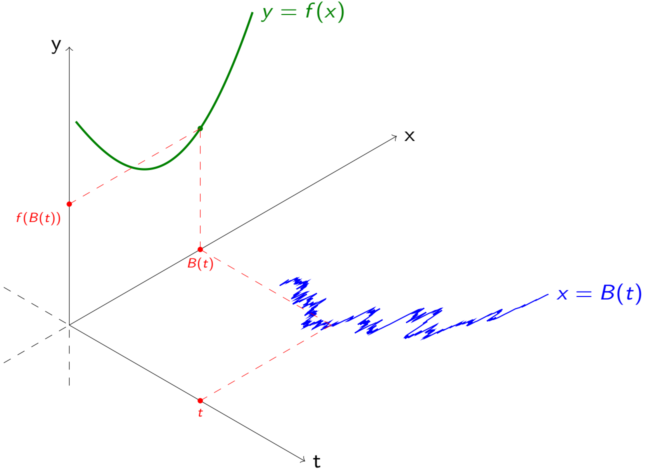
Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



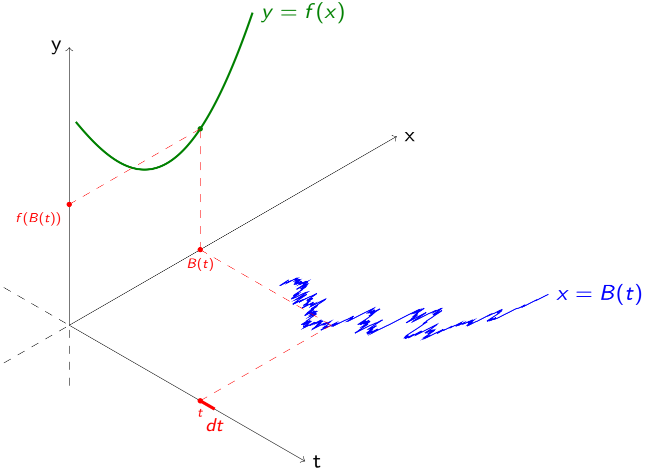
Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



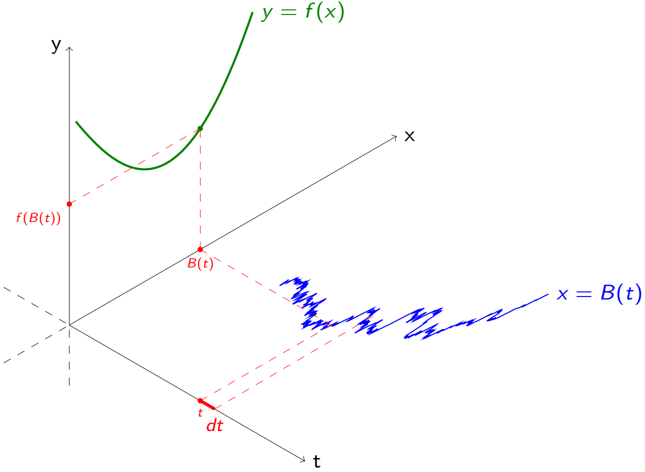
Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



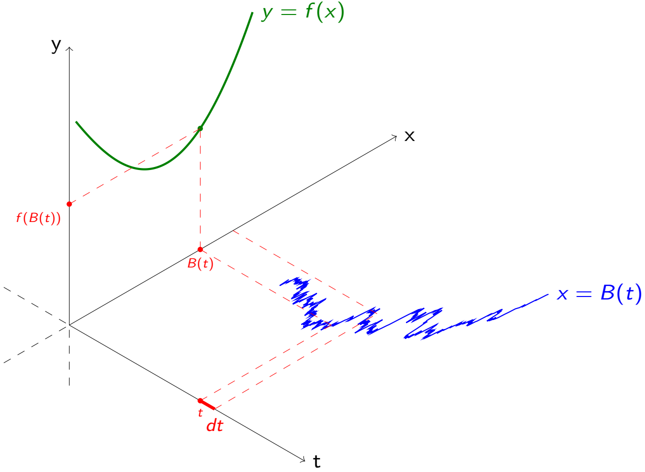
Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



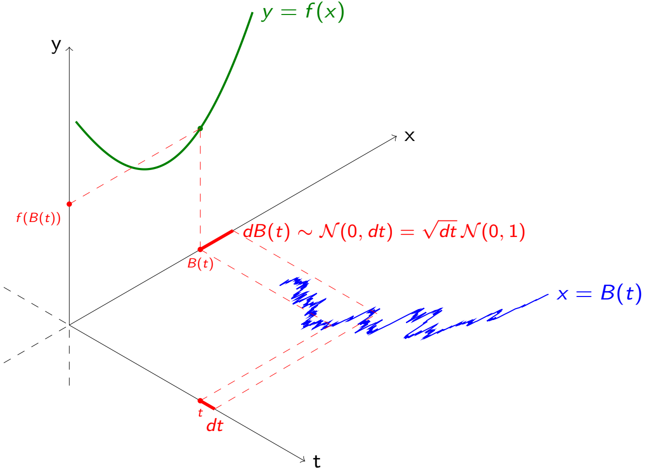
Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



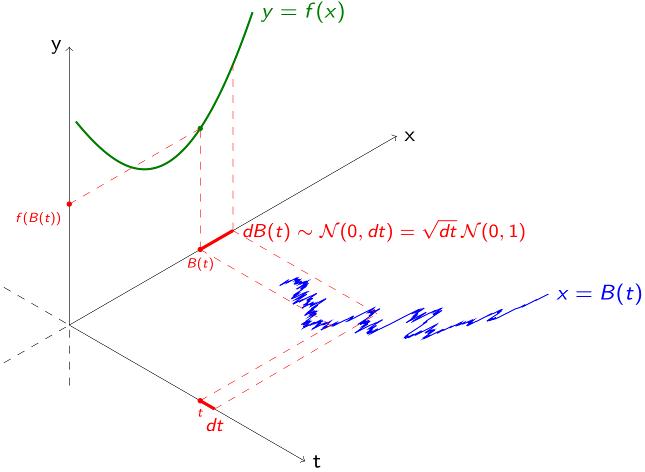
Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



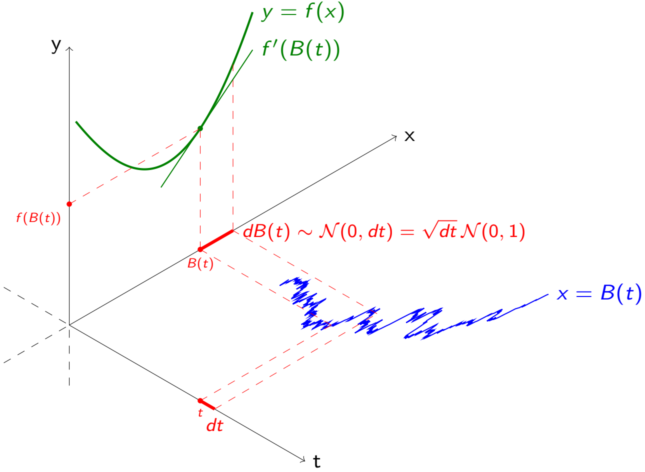
Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



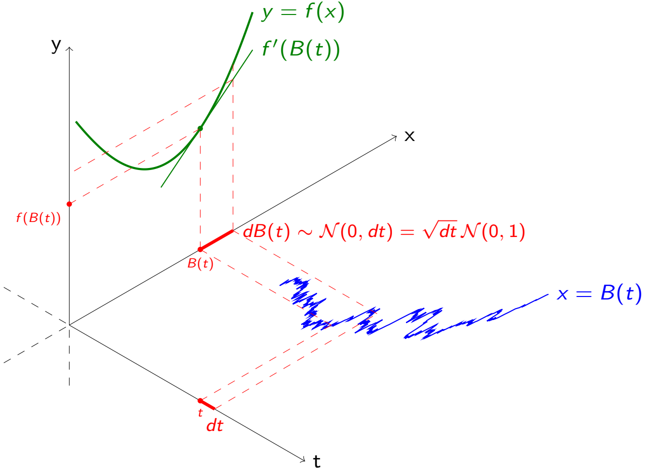
Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



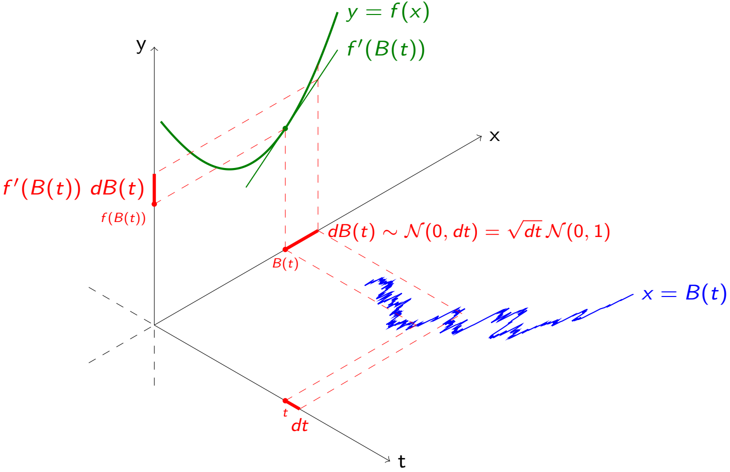
Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



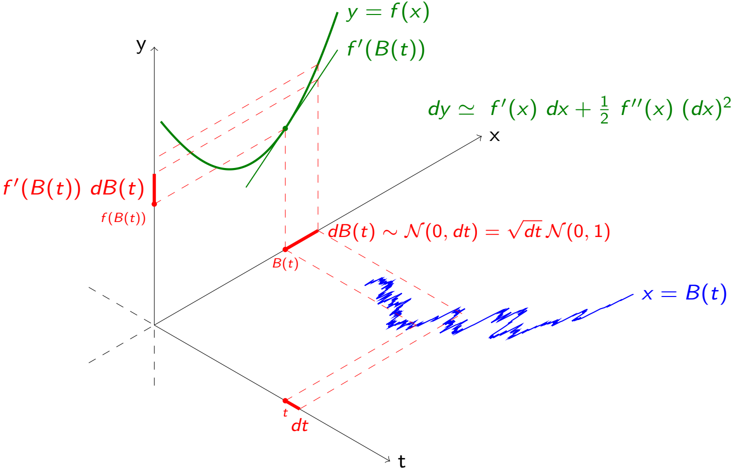
Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



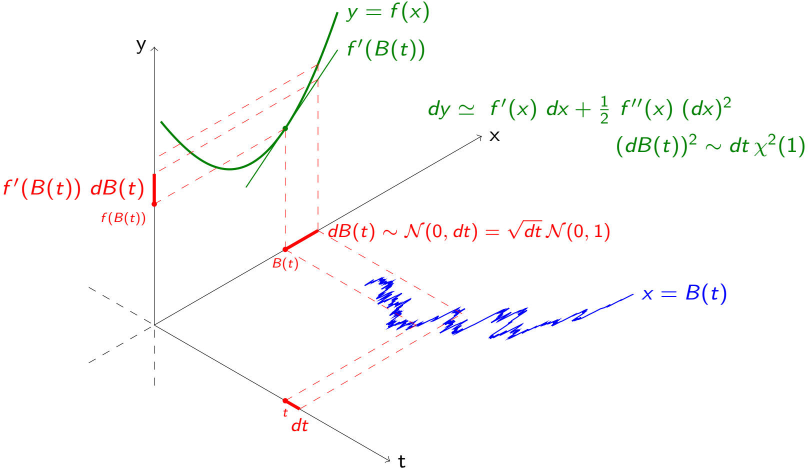
Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



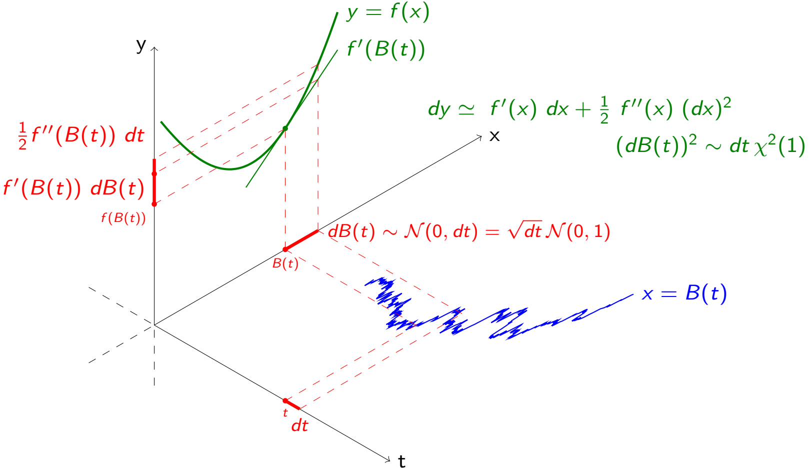
Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



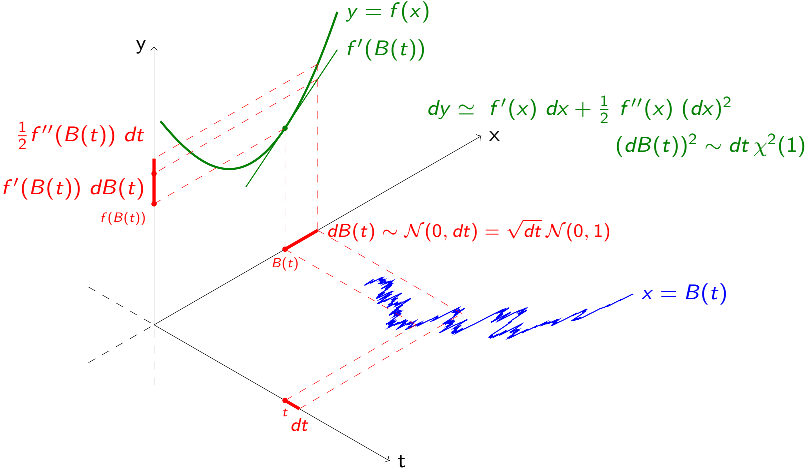
Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



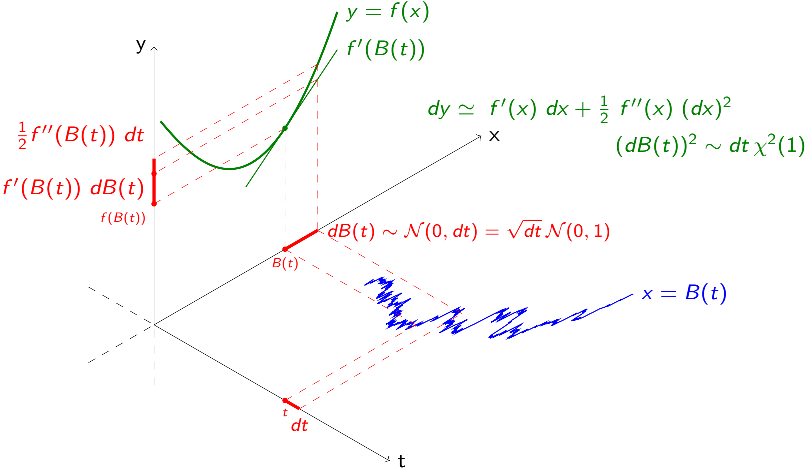
Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



Formule d'Itô

$$f(B(T)) - f(B(0)) = \int_0^T f'(B(t))\ dB(t) + \frac{1}{2}\int_0^T f''(B(t))\ dt \quad \text{pour toute } f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$$

Dérivation de la composée du brownien avec une fonction très lisse



Formule d'Itô

$$f(B(T)) - f(B(0)) = \int_0^T f'(B(t))\ dB(t) + \frac{1}{2} \int_0^T f''(B(t))\ dt \quad \text{pour toute } f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$$

Valable aussi en remplaçant le brownien B par une semi-martingale et le dt par sa variation quadratique.