Université Lille1
Sciences et Technologies

**U.F.R. de Mathématiques**

**Master 1 MathFi, 2014-2015** **M.Fradon**

**Processus Stochastiques. Examen du 21 avril 2015**

durée : 3 heures

Calculatrice et un recto-verso A4 manuscrit autorisés

## Ex 1. Option Strangle

On veut pricer et couvrir un strangle de strikes 58€ et 82€ et d'échéance 4 mois sur l'action AtosOrigin. Cette action vaut aujourd'hui $68,80$€.

1) On fabrique un modèle binomial de période le mois. Les taux d'intérêt actuels sont si bas qu'on utilisera le taux nul $r = 0$ dans les calculs. La volatilité annuelle d'AtosOrigin étant de 28%, on paramètre le modèle avec $u = e^{0,08}$ et $d = e^{-0,08}$ sur chaque période. Représenter sur un arbre les cours possibles de l'action modélisée, de l'instant 0 à l'instant final $T = 4$ (précision : 4 chiffres après la virgule).

2) Quelle est la probabilité risque-neutre $P^*$ de ce modèle ?

3) Le strangle est l'option de payoff $58 - S_4^1$ si le cours final $S_4^1$ est inférieur à 58€ et $S_4^1 - 82$ si le cours final dépasse 82€ :

$$h = (S_4^1 - 82)\mathbb{1}_{S_4^1 > 82} + (58 - S_4^1)\mathbb{1}_{S_4^1 < 58}$$

Tracer le graphe de $h$ en fonction du cours final.

4) Calculer la prime $\mathrm{Str}_0$ de cette option à l'instant initial.

5) Un portefeuille qui réplique le strangle (portefeuille de couverture) doit contenir à l'instant initial un nombre $\Delta_1$ d'actions et une quantité $\Phi_1^0$ d'argent. Calculer $\Delta_1$ et $\Phi_1^0$.

6) Le cours de l'action suit la trajectoire $(u, d, u, u)$, c'est-à-dire qu'il monte à la première période, baisse à la deuxième, puis monte pendant les deux dernières périodes. Indiquer comment évolue le portefeuille de couverture : quelle est sa valeur liquidative aux instants 1, 2, 3 et 4 ? Quelle est sa composition à ces instants ? Que constate-t-on, et pourquoi ?

7) Un trader raisonnable vend un strangle, encaisse la prime $\mathrm{Str}_0$ et s'en sert pour gérer un portefeuille de couverture comme à la question précédente. Si le cours de l'action suit la trajectoire $(u, d, u, u)$, combien a-t-il en portefeuille à l'instant final ?

Un trader paresseux vend un strangle, encaisse la prime, et garde cette somme $\mathrm{Str}_0$ jusqu'à l'échéance. Combien possède-t-il à l'instant final ?

Un trader inconscient vend un strangle, encaisse la prime $\mathrm{Str}_0$ et la place en totalité en actions AtosOrigin. Combien achète-t-il d'actions ? Si le cours suit la trajectoire $(u, d, u, u)$, quelle est la valeur liquidative de son portefeuille à l'instant final ?

Du raisonnable, du paresseux ou de l'inconscient, qui termine le plus riche ici ? Pourquoi, malgré tout, le trader raisonnable a-t-il raison ?

8) Dans le contexte de cet exercice, le portefeuille de couverture du strangle est-il une martingale ?

9) On veut toujours pricer et couvrir un strangle de strikes 58€ et 82€ et d'échéance 4 mois sur l'action AtosOrigin. Mais cette fois-ci on utilise le modèle de Black-Scholes. Le taux d'intérêt $r$ demeure nul. L'action AtosOrigin vaut toujours $S_0 = 68,80$€ à l'instant initial, et sa volatilité annuelle est $0,28$.

— Détenir un strangle est équivalent à détenir un call et un put. Indiquer lesquels.
— On rappelle la formule de Black-Scholes pour les calls et puts de strike $K$ et d'échéance $T$ sur l'action de prix $S_0$ et de volatilité $\sigma$ :

$$C_0 = S_0\ \Phi(d_1) - K\ e^{-rT}\ \Phi(d_1 - \sigma\sqrt{T})$$
$$P_0 = K\ e^{-rT}\ \Phi(-d_1 + \sigma\sqrt{T}) - S_0\ \Phi(-d_1) \qquad \text{où} \quad d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + rT + (\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Combien vaut la prime du strangle calculée par le modèle de Black-scholes ?

**Ex 2. Volatilité inversement proportionnelle à la valeur, en finance... et en mécanique**

Dans le modèle de Black-Scholes, le cours de l'action satisfait l'EDS

$$S_t = S_0 + \int_0^t \sigma S_s\ dB_s + \int_0^t \mu S_s\ ds$$

La solution est $S_t = S_0 \exp(\sigma B_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t)$. On a bien résolu l'équation, au sens où l'expresssion de $S_t$ trouvée ne dépend que des données ($B$, $\mu$, $\sigma$ et $S_0$) et pas de $S_s$.

On veut fabriquer un modèle à temps continu pour une valeur dont la volatilité est inversement proportionnelle au cours : plus le cours $S_t$ est élevé, plus ses fluctuations sont petites. On remplace la volatilité $\sigma$ par une volatilité $\frac{\sigma}{S_t}$ avec $\sigma$ une constante strictement positive. Le cours de cette valeur satisfait alors l'EDS suivante :

$$S_t = S_0 + \int_0^t \sigma\ dB_s + \int_0^t \mu S_s\ ds$$

où $\mu$ représente toujours le rendement moyen.

1) Résoudre cette EDS, i.e. trouver pour $S$ une expression qui ne dépend que de $\mu$, $\sigma$, $S_0$ et $B$. Indication : déterminer une EDS satisfaite par $X_t = e^{ct} S_t$ puis choisir judicieusement la constante $c$.

2) Un trader explique qu'un actif de volatilité inversement proportionnelle à sa valeur n'est pas intéressant : "soit il devient extrèmement instable, soit il tend vers un comportement stable mais fluctuant autour de zéro". Calculer en fonction de $t$ l'espérance et la variance du cours $S_t$ et expliquer dans quelle mesure ce trader a raison.

3) Pour étudier un système dynamique soumis à des perturbations aléatoires, on fixe une position initiale $Y_0$ dans $\mathbb{R}$, un point d'ancrage $b$ dans $\mathbb{R}$ et une force de rappel $a$ strictement positive. L'équation suivante modélise la position $Y_t$ à l'instant $t$ :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma\ dB_s - \int_0^t a(Y_s - b)\ ds$$

Déduire de la première question une solution de cette EDS, et de la deuxième le comportement en temps long de ce système dynamique.

Université Lille1 Sciences et Technologies

**U.F.R. de Mathématiques**

**Master 1 MathFi, 2014-2015** **M.Fradon**

## Processus Stochastiques. Examen, 21 avril 2015. Corrigé

### Ex 1. Option Strangle

1) Les valeurs successives du cours de l'action sont données par $S_n^1 = S_0^1 \prod_{k=1}^n U_k$ où les $U_k$ sont à valeurs dans $\{d; u\}$ et où $n$ varie de 1 à $T = 4$ :

| | | | | | strangle |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $94,7464$ | $12,7464$ |
| | | | $87,4619$ | | |
| | | $80,7375$ | | $80,7375$ | $0$ |
| | $74,5302$ | | $74,5302$ | | |
| $68,80$ | | $68,80$ | | $68,80$ | $0$ |
| | $63,5104$ | | $63,5104$ | | |
| | | $58,6275$ | | $58,6275$ | $0$ |
| | | | $54,1200$ | | |
| | | | | $49,9590$ | $8,0410$ |

2) Ce modèle a une probabilité risque-neutre $P^*$ puisque $d < 1 + r < u$. Sous $P^*$, les $U_k$ apparaissant dans l'expression $S_n^1 = S_0^1 \prod_{k=1}^n U_k$ sont indépendants, tous de loi

$$P^*(U_k = u) = \frac{1 - e^{-0,08}}{e^{0,08} - e^{-0,08}} =: p^* \simeq 0,48 \quad \text{et} \quad P^*(U_k = d) \simeq 0,52$$

3) Le strangle a pour payoff $h = \mathrm{Str}_4 = (S_4^1 - 82)\mathbb{1}_{S_4^1 > 82} + (58 - S_4^1)\mathbb{1}_{S_4^1 < 58}$ d'où le graphe

4) D'après le théorème de pricing, la prime initiale du strangle vaut

$$\mathrm{Str}_0 = E^*\left(\frac{h}{(1+r)^4}\right) = E^*\left((S_4^1 - 82)\mathbb{1}_{S_4^1 > 82} + (58 - S_4^1)\mathbb{1}_{S_4^1 < 58}\right)$$

L'arbre construit à la première question indique que $h$ ne prend de valeur strictement positive que si $S_4^1 = 94,7464$ (cas où tous les $U_k$ valent $u$) ou si $S_4^1 = 49,9590$ (cas où tous les $U_k$ valent $d$) donc

$$\mathrm{Str}_0 = (94,7464 - 82)(p^*)^4 + (58 - 49,9590)(1 - p^*)^4 \simeq 1,2646€$$

5) Celui qui a vendu le strangle encaisse les $1,2646€$ et les place en $\Delta_1$ actions et $\Phi_1^0$ euros en banque. On sait que

$$\Delta_1 = \frac{\mathrm{Str}_1(S_0^1 u) - \mathrm{Str}_1(S_0^1 d)}{S_0^1 u - S_0^1 d}$$

en notant $\mathrm{Str}_1(S_0^1 u)$ la prime du strangle à l'instant 1 quand l'action vaut $S_0^1 u = 74,5302€$ et $\mathrm{Str}_1(S_0^1 d)$ la prime du strangle à l'instant 1 quand l'action vaut $S_0^1 ud = 63,5104€$. Quand l'action vaut $S_1^1 = 74,5302€$, l'exercice du strangle trois périodes plus tard ne peut se faire que si la trajectoire ultérieure du cours est $(u, u, u)$ (uniquement des montées) donc

$$\mathrm{Str}_1(S_0^1 u) = E^* \left( \frac{h}{(1+r)^3} | S_1^1 = 74,5302 \right) = (94,7464 - 82)(p^*)^3 \simeq 1,4097€$$

et quand l'action vaut $S_0^1 ud = 63,5104€$, l'exercice du strangle n'aura lieu que si la trajectoire ultérieure est $(d, d, d)$ (uniquement des baisses) donc

$$\mathrm{Str}_1(S_0^1 d) = E^* \left( \frac{h}{(1+r)^3} | S_1^1 = 63,5104 \right) = (58 - 49,9590)(1 - p^*)^3 \simeq 1,1306€$$

On obtient

$$\Delta_1 = \frac{1,4097 - 1,1306}{74,5302 - 63,5104} \simeq 0,0253 \text{ actions dans le portefeuillle de couverture}$$

On laisse à la banque la partie de la prime qui n'est pas dépensée pour acheter des actions :

$$\Phi_1^0 = \mathrm{Str}_0 - \Delta_1 S_0^1 = 1,2646 - 0,0253 \times 68,80 \simeq -0,4779€ \text{ (emprunt de } 47,79 \text{ centimes)}$$

6) Le cours de l'action a monté pendant la première période, elle vaut maintenant $S_1^1 = 74,5302€$. En tenant compte du fait que $r = 0$, le portefeuille de couverture vaut maintenant $\mathrm{Str}_1(S_0^1 u)$ :

$$V_1 = -0,4779 + 0,0253 \times 74,5302 \simeq 1,4097€$$

On doit recomposer ce portefeuille pour suivre une stratégie de couverture dynamique : répartir cette somme de $1,4097€$ en $\Delta_2$ actions et $\Phi_2^0$ euros en banque avec

$$\Delta_2(74,5302) = \frac{\mathrm{Str}_2(S_0^1 u^2) - \mathrm{Str}_2(S_0^1 ud)}{S_0^1 u^2 - S_0^1 ud}$$

Il est clair que $\mathrm{Str}_2(S_0^1 ud) = 0$ puisque le strangle n'est jamais exercé si à l'instant 2 l'action vaut $S_0^1 ud$. D'autre part

$$\mathrm{Str}_2(S_0^1 u^2) = (94,7464 - 82)(p^*)^2 \simeq 2,9369€$$

donc $\Delta_2(74,5302) = 2,9369/(80,7375 - 68,80) \simeq 0,2460$. Le portefeuille de couverture est maintenant constitué de $0,2460$ actions et de $\Phi_2^0 = 1,4097 - 0,2460 \times 74,5302 \simeq -16,9247€$ en banque (on a donc une dette).

A la période suivant, le cours baisse, l'action vaut maintenant $S^1_2 = S^1_0 ud$, et le portefeuille de couverture prend la valeur $\mathrm{Str}_2(S^1_0 ud) = 0$. C'est normal puisqu'on est maintenant certain que le strangle ne sera pas exercé. Ensuite, le portefeuille reste à zéro : pas d'action et pas d'argent en banque aux instants 2, 3 et 4. Puisque le strangle n'est exerçable que si l'action ne fait que monter ou que baisser, il perd toute valeur à partir du moment où on sait que le cours contient à la fois une hausse et une baisse, il était donc prévisible qu'on n'ait plus besoin de le couvrir dans cette situation.

7) On a calculé que si le cours de l'action suit la trajectoire $(u, d, u, u)$, un trader qui gère un portefeuille de couverture détient zéro à l'instant final.

Le trader "paresseux" qui garde la prime sans la gérer possède $1,2646$€ (montant de la prime) à l'instant final.

Le trader "inconscient" qui place la totalité de la prime en actions AtosOrigin en achète $1,2646/68,80 \simeq 0,0184$. Ici l'action prend la valeur $80,7375$€ à l'instant final, donc la valeur liquidative de son portefeuille sera $0,0184 \times 80,7375 \simeq 1,4840$€.

C'est donc le trader "inconscient" qui finit le plus riche dans ce cas. Mais, comme le trader "paresseux", il a obtenu ce résultat en courant un risque non-nul de faillite. S'il répète souvent ce type d'opération, le théorème de Borel-Cantelli assure que (même si le risque de faillite est très faible à chaque fois) la probabilité de faire faillite en temps long tend vers 100%. Ceci explique pourquoi, même quand les perspectives de gain immédiat sont plus élevées avec d'autres stratégies, les stratégies de couverture (rester delta-neutre) sont utilisées dans la réalité.

8) Dans cet exercice, le taux d'intérêt est nul, donc la valeur du portefeuille de couverture est égale à sa valeur actualisée. Puisqu'il est géré selon une stratégie autofinacée, sa valeur actualisée est une martingale, et par conséquent sa valeur brute aussi.

9) Le payoff

$$h = (S_4 - 82)\mathbb{1}_{S_4>82} + (58 - S_4)\mathbb{1}_{S_4<58}$$

prouve que le strangle est la somme d'un call européen de strike 82€ et d'un put européen de strike 58€, tous deux d'échéance 4 mois, sur l'action AtosOrigin. On peut aussi le voir sur le graphe du payoff.

En utilisant la formule de Black-Scholes avec $T = 1/3$ et $\sigma = 0,28$ (données annuelles) ou $T = 4$ et $\sigma = 0,28/\sqrt{12}$ (données mensuelles), on obtient $d_1 \simeq -1,00489$ pour le call et $d_1 \simeq 1,137137$ pour le put. La prime du call de strike 82€est de 0.8552€. Celle du put de 0.7618. La somme donne une prime du strangle égale à 1.6170€.

Remarque : cette valeur est plus précise que celle obtenue par le modèle à temps discret. Dans la pratique (i.e. quand on dispose d'un ordinateur) la modélisation sur 4 mois d'une action cotée en continu se fait avec un *très* grand nombre de périodes.

**Ex 2. Volatilité inversement proportionnelle à la valeur, en finance... et en mécanique**

1) On fait une intégration par parties stochastiques :

$$e^{ct}S_t = S_0 + \int_0^t e^{cs}\, dS_s + \int_0^t S_s c e^{cs}\, ds + 0 = S_0 + \int_0^t e^{cs}\,\sigma\, dB_s + \int_0^t e^{cs}\mu S_s\, ds + \int_0^t S_s c e^{cs}\, ds$$

ce qui donne ($P$-p.s. pour tout $t$ de $[0; T]$)

$$e^{ct}S_t = S_0 + \int_0^t e^{cs}\,\sigma\, dB_s + \int_0^t (\mu + c)e^{cs}S_s\, ds$$

Il suffit de prendre $c = -\mu$ pour obtenir la solution $S_t = S_0 e^{\mu t} + \int_0^t e^{\mu(t-s)}\,\sigma\, dB_s$

2) Quel que soit $\mu \in \mathbb{R}$, $\int_0^{\cdot} e^{-\mu s}\ dB_s$ est l'intégrale stochastique d'un processus de carré intégrable puisque $E\left(\int_0^T (e^{-\mu s})^2\ ds\right) = \int_0^T e^{-2\mu s}\ ds < +\infty$. C'est donc une martingale, et son espérance est nulle.

$$E(S_t) = E\left(S_0 e^{\mu t} + \int_0^t e^{\mu(t-s)}\ \sigma\ dB_s\right) = S_0 e^{\mu t} + \sigma e^{\mu t} \times 0 = S_0 e^{\mu t}$$

Le calcul de la variance utilise le fait que $S_0 e^{\mu t}$ n'est pas aléatoire

$$\mathrm{Var}(S_t) = \mathrm{Var}\left(S_0 e^{\mu t} + \int_0^t e^{\mu(t-s)}\ \sigma\ dB_s\right) = \mathrm{Var}\left(\int_0^t e^{\mu(t-s)}\ \sigma\ dB_s\right) = E\left(\left(\int_0^t e^{\mu(t-s)}\ \sigma\ dB_s\right)^2\right)$$

La propriété d'isométrie donne

$$\mathrm{Var}(S_t) = E\left(\int_0^t e^{2\mu(t-s)}\ \sigma^2\ ds\right) = \sigma^2 e^{2\mu t} \int_0^t e^{-2\mu s}\ ds$$

Dans le cas où $\mu$ est non-nulle on obtient

$$\mathrm{Var}(S_t) = \sigma^2 e^{2\mu t}\ \frac{e^{-2\mu t} - 1}{-2\mu} = \frac{\sigma^2}{2\mu}\ (e^{2\mu t} - 1)$$

et si $\mu = 0$ on obtient $\mathrm{Var}(S_t) = \sigma^2\ t$.

On constate que si le rendement moyen $\mu$ est positif, en temps long la variance de $S_t$ tend vers l'infini donc le trader a raison de dire que le cours "devient extrèmement instable". Si le rendement moyen $\mu$ est strictement négatif, la variance de $S_t$ tend vers $-\frac{\sigma^2}{2\mu}$, donc en temps long l'amplitude des fluctuations se stabilise vers $\frac{\sigma}{\sqrt{-2\mu}}$, mais ces fluctuations se font autour de l'espérance qui tend vers zéro. On peut donc parler de "comportement stable mais fluctuant autour de zéro".

3) L'EDS de $S$ est similaire à celle de $Y$ si on prend $S_t = Y_t - b$. Faisons cette tranformation :

$$(Y_t - b) = (Y_0 - b) + \int_0^t \sigma\ dB_s - \int_0^t a(Y_s - b)\ ds$$

On utilise la solution trouvée à la première question, dans le cas où $\mu = -a$ et $S_0 = Y_0 - b$, ce qui donne ($P$-p.s. pour tout $t$ de $[0;T]$)

$$(Y_t - b) = (Y_0 - b)e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)}\ \sigma\ dB_s \quad \text{i.e.} \quad Y_t = b + (Y_0 - b)e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)}\ \sigma\ dB_s$$

Puisque $-a$ est strictement négatif, $E(Y_t) = b + (Y_0 - b)e^{-at}$ tend vers $b$ et $\mathrm{Var}(S_t) = \frac{\sigma^2}{2a}\ (1 - e^{-2at})$ tend vers $\frac{\sigma^2}{2a}$ : en temps long, la position oscille aléatoirement autour du point d'équilibre $b$ avec un écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{2a}}$ (et même, la loi de $Y_t$ est la $\mathcal{N}\left(b + (Y_0 - b)e^{-at}\ ;\ \frac{\sigma^2}{2a}\ (1 - e^{-2at})\right)$ qui tend vers la $\mathcal{N}\left(b\ ;\ \frac{\sigma^2}{2a}\right)$ mais ce n'était évidemment pas demandé dans le devoir).

Université Lille 1 Sciences et Technologies

**U.F.R. de Mathématiques**

**Master 1 MathFi, 2014-2015** **M.Fradon**

**Examen, deuxième session, 23 juin 2015**
durée : 3 heures
Calculatrice et un recto-verso A4 manuscrit autorisés

## Ex 1. Gestion de trésorerie

Une personne gère la trésorerie d'une entreprise. Elle reçoit une rentrée d'argent de 30 429€. Cette somme servira à payer une facture de 27 600€ pour laquelle le fournisseur a consenti un délai de paiement de 4 mois. Entre-temps, la personne peut donc placer ces 30 429€. Mais le taux mensuel $0,004\% = 0,00004$ en vigueur actuellement ne la satisfait pas. Elle pense par contre que certaines compagnies pétrolières offrent de bonnes perspectives de gain. Cette personne décide donc d'acheter pour 30 429€ d'actions Total.

1) L'action Total cote actuellement à 44, 10€. Combien achète-on d'actions ? La personne revendra ces actions dans 4 mois. Il est nécessaire que le montant de la vente couvre les 27 600€ à payer à cette date. Pour chaque action, elle achète donc aussi un put européen d'échéance 4 mois. Quel strike choisit-elle ?

2) La formule de Black-Scholes pour les puts de strike $K$ et d'échéance $T$ sur l'action de prix $S_0$ et de volatilité $\sigma$ dans un marché de taux d'intérêt $r$ est :

$$P_0 = K\ e^{-rT}\ \Phi(-d_1 + \sigma\sqrt{T}) - S_0\ \Phi(-d_1) \qquad \text{où} \quad d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + rT + (\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

L'action Total a pour volatilité annuelle $\sigma = 0,25$. Calculer la prime du put.

3) Combien va coûter en tout l'achat des puts. De combien le cours de Total doit-il monter dans les 4 mois qui viennent pour que ce choix de gestion de trésorerie se révèle judicieux ?

## Ex 2. Comportement approché de la valeur intrinsèque d'un straddle

Dans le modèle de Black-Scholes, le cours d'une action est modélisé par l'EDS suivante :

$$S_t = S_0 + \int_0^t \sigma S_s\ dB_s + \int_0^t \mu S_s\ ds$$

Autrement dit, le cours est $S_t = S_0 \exp(\sigma B_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t)$ avec une volatilité $\sigma > 0$ fixée et une rendement moyen $\mu \in \mathbb{R}$ également fixé.

On s'intéresse à la valeur intrinsèque (valeur si l'option est immédiatement exercée) pour un straddle de strike $K$. Cette valeur est $|S_t - K|$. On souhaite savoir de quelle EDS le processus $(|S_t - K|)_t$ est solution.

1) Obtenir une EDS satisfaite par $(|S_t - K|)_t$ à partir de l'EDS de $(S_t)_t$ n'est pas possible en utilisant la formule d'Itô [1]. Expliquer pourquoi.

1. En fait, on pourrait utiliser ici une généralisation de la formule d'Itô, la formule de Tanaka. Elle donne l'EDS cherchée. Mais la formule de Tanaka n'est pas à notre programme.

2) Pour contourner ce problème, on va remplacer la valeur $|S_t - K|$ par une valeur très proche à laquelle on peut appliquer la formule d'Itô. Fixons un écart $\varepsilon$ strictement positif à ne pas dépasser. Prouver, pour tout réel $x$, l'inégalité

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + \varepsilon^2} \leq |x| + \varepsilon$$

3) A tout instant, l'écart entre la valeur intrinsèque $|S_t - K|$ et la valeur approchée $\sqrt{(S_t - K)^2 + \varepsilon^2}$ est au plus égal à $\varepsilon$. En utilisant la formule d'Itô, trouver une EDS satisfaite par le processus approximant $(\sqrt{(S_t - K)^2 + \varepsilon^2}\ )_t$.

**Ex 3.** On construit un modèle binomial à une seule période pour modéliser deux actions $S^1$ et $S^2$. Le taux d'intérêt de l'actif sans risque $S^0$ au cours de l'unique période est nul : $r = 0$. La valeur initiale est la même, 50€, pour les deux actions. Mais $S^2$ a une plus grande volatilité. Les deux cours initiaux sont donc $S_0^1 = S_0^2 = 50$. Les deux cours finaux sont $S_1^1 = S_0^1\ U$ et $S_1^2 = S_0^2\ V$, où $U$ et $V$ sont des variables aléatoires sur $\Omega = \{\ 1,1\ ;\ 0,9\ \} \times \{\ 1,2\ ;\ 0,8\ \}$ muni de la tribu de toutes ses parties. $U$ et $V$ sont telles que :

$$P(U = 1,1) = 1 - P(U = 0,9)\ \in ]0;1[ \qquad \text{et} \qquad P(V = 1,2) = 1 - P(V = 0,8)\ \in ]0;1[$$

On ne connait pas le degré de dépendance entre les actions $S^1$ et $S^2$ sous la probabilité historique $P$. On ne fait donc pas d'hypothèse de dépendance ou d'indépendance entre $U$ et $V$. Par contre, on suppose comme dans le cours que $P$ donne une probabilité positive à tous les événements non-vides (on évite les modèles dégénérés).

Dans ce modèle discret à deux actions et une seule période, une stratégie de gestion est toujours de la forme

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_0^0 & \Phi_1^0 \\ \Phi_0^1 & \Phi_1^1 \\ \Phi_0^2 & \Phi_1^2 \end{bmatrix}$$

Les $\Phi_0^i$ représentent les quantités de chaque actif $S^i$ au moment où on constitue le portefeuille, et les $\Phi_1^i$ les quantités de chaque actif $S^i$ qu'on a en portefeuille pendant l'unique période du modèle.

1) Les $\Phi_n^i$ ci-dessus sont par définition des variables aléatoires. Par rapport à quelle(s) tribu(s) sont-ils mesurables ? Lesquels d'entre eux sont des variables aléatoires déterministes, c'est-à-dire simplement des nombres ?

2) A quelle condition $\Phi$ est-elle autofinancée ici ? A quelle condition est-elle admissible ? (écrire les définitions dans le cas particulier de ce modèle à une seule période)

3) A quelle condition une variable aléatoire sur $\Omega$ est-elle un actif conditionnel ? A quelle condition cet actif conditionnel est-il réplicable (on dit aussi simulable ou atteignable) ? (donner les définitions dans le cas particulier de ce modèle)

4) On considère l'actif $C = \max(S_1^1, S_1^2)$. Est-ce un actif conditionnel ? Est-il réplicable ? (justifier)

5) A quelle condition une probabilité $P^*$ sur cet $\Omega$ est-elle risque-neutre ?

6) Prouver qu'il existe au moins une probabilité risque-neutre dans ce modèle en donnant explicitement une probabilité sur $\Omega$ qui satisfait la condition énoncée à la question précédente.

7) Prouver qu'il existe plusieurs probabilités risque-neutre dans ce modèle en donnant une autre probabilité, différente de la précédente, qui satisfait aussi la condition énoncée à la question 5. Ce résultat est-il cohérent avec celui de la question 4 ?

## Corrigé de la 2eme session

### Ex 1. Gestion de trésorerie

1) Pour placer 30 429€ en action Total qui cotent à $44,10$€, il faut acheter $30\,429/44,10 = 690$ actions. Pour récupérer au moins 27 600€ en vendant 690 actions, il faut que chacune soit vendue au minimum à $27\,600/690 = 40$€. La personne achète donc des 690 puts de strike $K = 40$€.

2) Pour utiliser la formule de Black-Scholes, il faut convertir toutes les données dans la même unité. Ici, par exemple, on décide d'utiliser des données annuelles :

$$P_0 = K\ e^{-rT}\ \Phi(-d_1 + \sigma\sqrt{T}) - S_0\ \Phi(-d_1) \qquad \text{où} \quad d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + rT + (\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

avec $\sigma = 0,25$, $r = (1,00004)^{12} - 1 \simeq 0,048\%$, $T = 4/12$ et $S_0 = 44,10$€. Le calcul donne la valeur du put $P_0 = 0,90$€.

3) L'achat des 690 puts va coûter en tout $690 \times 0,90 = 621$€.

Si on avait choisit de placer les 30 429€ au taux mensuel $0,004\%$, on aurait au bout de 4 mois $30\,429(1,00004)^4 \simeq 30433,87$€ soit un gain de $4,87$€. Pour que le choix de gestion fait ici soit rentable, il faut que le placement en actions rapporte au moins autant à la date finale. Or on a dépensé 621€ ($621(1,00004)^4 \simeq 621,10$€ en valeur actualisée) pour la couverture des puts. il faut donc que le gain par action soit au moins de $(621,10 + 4,87)/690 \simeq 0,907$€. Le cours de Total doit donc monter de 91 centimes au moins (atteindre les $45,01$€) dans les 4 mois qui viennent pour que ce choix de gestion soit rentable.

### Ex 2. Comportement approché de la valeur intrinsèque d'un straddle

1) Pour obtenir une EDS satisfaite par $(|S_t - K|)_t$ à partir de l'EDS de $(S_t)_t$, il faudrait utiliser la formule d'Itô avec la fonction $x \longmapsto |x - K|$. On a besoin pour cela que cette fonction soit $\mathcal{C}^2$. Or, elle est non-dérivable en $K$. Les hypothèses de la formule d'Itô ne sont donc pas satisfaites.

2) Pour tout seuil $\varepsilon > 0$ et tout réel $x$,

$$x^2 \leq x^2 + \varepsilon^2 \leq |x|^2 + 2\varepsilon|x| + \varepsilon^2$$

La fonction racine carrée étant croissante, elle conserve cette inégalité :

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + \varepsilon^2} \leq |x| + \varepsilon$$

3) On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{(x-K)^2 + \varepsilon^2}$. La fonction $x \longmapsto (x-K)^2 + \varepsilon^2$ est $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ vers $[\varepsilon^2; +\infty[$ et la fonction racine carrée est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[\varepsilon^2; +\infty[$, donc $f$ est $\mathcal{C}^2$. On applique la formule d'Itô à cette fonction $f$ et au processsus d'Itô $S$ satisfaisant

$$S_t = S_0 + \int_0^t \sigma S_s\ dB_s + \int_0^t \mu S_s\ ds$$

Comme
$$f'(x) = \frac{x-K}{\sqrt{(x-K)^2+\varepsilon^2}} = \frac{x-K}{f(x)}$$
et
$$f''(x) = \frac{\sqrt{(x-K)^2+\varepsilon^2} - \frac{x-K}{\sqrt{(x-K)^2+\varepsilon^2}}(x-K)}{(x-K)^2+\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon^2}{((x-K)^2+\varepsilon^2)^{3/2}} = \frac{\varepsilon^2}{(f(x))^3}$$
on obtient
$$f(S_t) = f(S_0) + \int_0^t \frac{S_s - K}{f(S_s)}\sigma S_s \, dB_s + \int_0^t \frac{S_s-K}{f(S_s)}\mu S_s \, ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\varepsilon^2}{(f(S_s))^3}\sigma^2 (S_s)^2 \, ds$$
Ceci donne l'EDS suivante pour $f(S_t) = \sqrt{(S_t-K)^2+\varepsilon^2}$ :
$$f(S_t) = f(S_0) + \int_0^t \frac{\sigma S_s \, (S_s-K)}{\sqrt{(S_s-K)^2+\varepsilon^2}} \, dB_s + \int_0^t \frac{2\mu S_s (S_s-K)^3 + 2\mu\varepsilon^2 S_s + \varepsilon^2\sigma^2(S_s)^2}{2\left((S_s-K)^2+\varepsilon^2)\right)^{3/2}} \, ds$$

**Ex 3.** 1) Les quantités $\Phi_0^i$ qui constituent initialement le portefeuille sont toujours $\mathcal{F}_0$-mesurables. Puisque $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset \, , \, \Omega\}$, les $\Phi_0^i$ sont déterministes. Le processus $\Phi$ étant prévisible, les $\Phi_1^i$ sont aussi $\mathcal{F}_0$-mesurables. Tous les $\Phi_n^i$ apparaissant ici sont donc des nombres. Ceci est dû au fait que le modèle n'a qu'une seule période.

2) Par définition, $\Phi$ est autofinancée si la recomposition du portefeuille ne change pas sa valeur liquidative, à tous les instants où on peut le recomposer. Ici, c'est uniquement l'instant zéro. La condition d'autofinancement s'écrit donc ici $\Phi_0.S_0 = \Phi_1.S_0$. Puisque $S_0^0 = 1$ par définition et $S_0^1 = S_0^2 = 50$ d'après l'énoncé :
$$\Phi_0.S_0 = \Phi_1.S_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \Phi_0^0 + 50\Phi_0^1 + 50\Phi_0^2 = \Phi_1^0 + 50\Phi_1^1 + 50\Phi_1^2$$
La stratégie est admissible si elle assure en plus une richesse positive à chaque instant. Puisqu'il n'y a ici que les instant 0 et 1, il faut avoir :
$$\Phi_0^0 + 50\Phi_0^1 + 50\Phi_0^2 \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \Phi_1^0 + 50 \; U \; \Phi_1^1 + 50 \; V \; \Phi_1^2 \geq 0$$

3) Un actif conditionnel est une variable aléatoire $\mathcal{F}_1$-mesurable positive. Mais puisque 1 est l'instant final, $\mathcal{F}_1$ est l'ensemble de toutes les parties de $\Omega$ et toute application sur $\Omega$ est $\mathcal{F}_1$-mesurable. Toute application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}^+$ est donc un actif conditionnel. L'actif conditionnel $h \geq 0$ est réplicable s'il est valeur terminale d'une stratégie admissible, c'est-à-dire s'il existe six nombres $\Phi_n^i$ tels que
$$h = \Phi_1^0 + 50\,U\,\Phi_1^1 + 50\,V\,\Phi_1^2 \quad \text{et} \quad \Phi_0^0+50\Phi_0^1+50\Phi_0^2 = \Phi_1^0+50\Phi_1^1+50\Phi_1^2 \quad \text{et} \quad \Phi_0^0+50\Phi_0^1+50\Phi_0^2 \geq 0$$

4) $C = \max(S_1^1, S_1^2) = 50\max(U,V)$ est une variable aléatoire positive. C'est donc un actif conditionnel. Pour qu'elle soit réplicable, il faut trouver $\Phi_1^0$, $\Phi_1^1$ et $\Phi_1^2$ tels que $50\max(U,V) = \Phi_1^0 + 50 \; U \; \Phi_1^1 + 50 \; V \; \Phi_1^2$. En énumérant les quatres cas possibles, cette condition se traduit par :
$$\begin{cases} 1,2 = \frac{\Phi_1^0}{50} + 1,1 \; \Phi_1^1 + 1,2 \; \Phi_1^2 \\ 1,1 = \frac{\Phi_1^0}{50} + 1,1 \; \Phi_1^1 + 0,8 \; \Phi_1^2 \\ 1,2 = \frac{\Phi_1^0}{50} + 0,9 \; \Phi_1^1 + 1,2 \; \Phi_1^2 \\ 0,9 = \frac{\Phi_1^0}{50} + 0,9 \; \Phi_1^1 + 0,8 \; \Phi_1^2 \end{cases}$$

Ce système linéaire de quatre équations à trois inconnues ne peut avoir de solution que si l'une des équations est combinaison linéaire des autres, ce qui n'est pas le cas ici. On constate par exemple que les deux premières équations impliquent $0,1 = 0,4\ \Phi_1^2$ et les deux dernières $0,3 = 0,4\ \Phi_1^2$ ce qui impose $\Phi_1^2 = 0$, alors que les deux premières équations imposent $\Phi_1^2 \neq 0$. $C = \max(S_1^1, S_2^2)$ est donc un actif conditionnel non réplicable. Le théorème d'Harrison-Pliska assure donc qu'ici, s'il y a une probabilité risque-neutre, il y en a plusieurs, puisqu'il existe au moins un actif conditionnel non réplicable.

5) $P^*$ définie sur l'ensemble des parties de $\Omega = \{\ 1,1\ ;\ 0,9\ \} \times \{\ 1,2\ ;\ 0,8\ \}$ est risque-neutre si chaque singleton est de probabilité positive et si le processus de prix actualisé $\tilde{S}$ est une martingale. Puisque le taux d'intérêt est nul, l'actualisation ne change pas le processus ici : $\tilde{S} = S$. Le processus de prix actualisé est une martingale dès lors que $E^*(S_1^1) = S_0^1$ et $E^*(S_1^2) = S_0^2$, i.e. dès lors que $E^*(U) = 1$ et $E^*(V) = 1$.

6) Notons $P^*$ la loi uniforme sur $\Omega = \{\ 1,1\ ;\ 0,9\ \} \times \{\ 1,2\ ;\ 0,8\ \}$ : chaque événement élémentaire est de probabilité $1/4$. $U$ et $V$ sont d'espérance 1 sous $P^*$, il s'agit donc bien d'une probabilité risque-neutre.

7) Notons $P_2^*$ une autre probabilité sous laquelle $P(U = 1,1) = P(U = 0,9) = 1/2$ et $P(V = 1,2) = P(V = 0,8) = 1/2$. Par exemple, prenons

$$\begin{array}{ll} P_2^*(U = 1,1 \text{ et } V = 1,2) = 0,2 & P_2^*(U = 1,1 \text{ et } V = 0,8) = 0,3 \\ P_2^*(U = 0,9 \text{ et } V = 1,2) = 0,3 & P_2^*(U = 0,9 \text{ et } V = 0,8) = 0,2 \end{array}$$

$P_2^*$ est risque-neutre et différente de $P^*$. C'est cohérent avec la conséquence du théorème d'Harrison-Pliska mentionnée à la question 5, qui annonçait que s'il existait une risque-neutre il en existait plusieurs.