Université Lille1 Sciences et Technologies

U.F.R. de Mathématiques

GIS 5 MathFi, 2013-2014 **M.Fradon**

Mathématiques Financières, 5 décembre 2013

Documents et calculatrices autorisés

Ex 1. On veut pricer et couvrir des options d'échéance trois mois sur une action dont le cours actuel est de 200€. On utilise un modèle binomial dont la période est le mois. Le taux d'intérêt mensuel est $r = 0,001$ et les coefficients up et down du modèle sont $u = 1,32$ et $d = 0,76$.

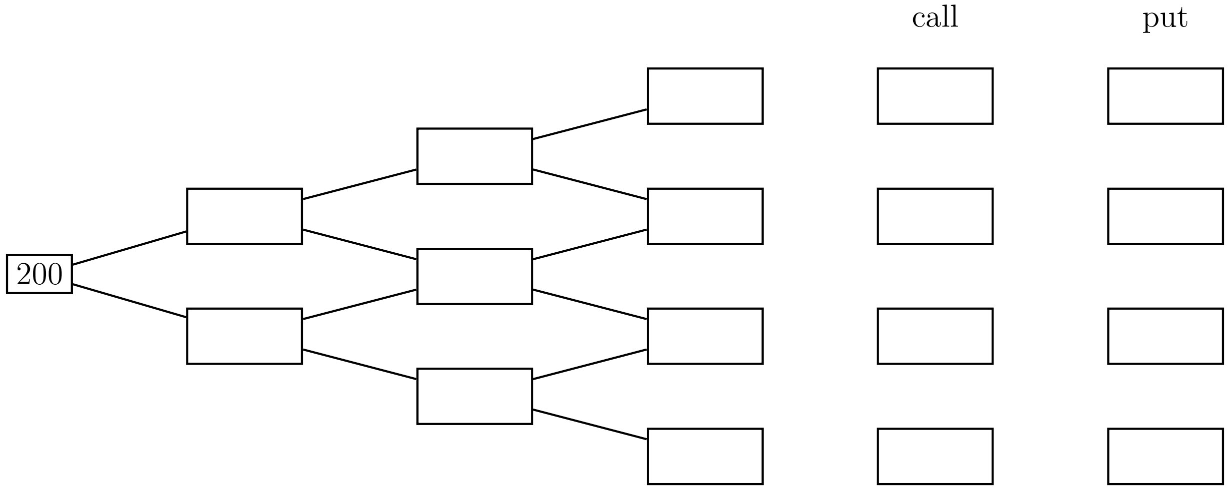
1) A quel taux d'intérêt annuel correspond le taux d'intérêt mensuel $r = 0,1\%$?

2) Les coefficients $u = 1,32$ et $d = 0,76$ correspondent à une volatilité mensuelle de $0,2766 = 27,66\%$. Quelle est la volatilité annuelle de l'action ?

3) Vérifier que ce modèle a une probabilité risque-neutre, et la calculer.

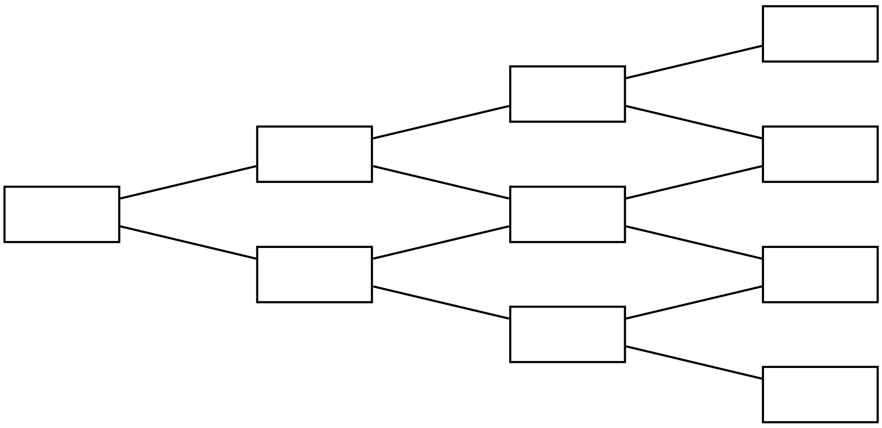
4) Représenter sur cet arbre toutes les valeurs possibles de l'action, de la valeur initiale 200€ jusqu'aux différentes valeurs finales possibles d'après ce modèle. Mettre dans les deux dernières colonnes les sommes encaissées à échéance par le détenteur

d'un call de prix d'exercice 200€ sur cette action, et celles encaissées par le détenteur d'un put de même prix d'exercice.



5) On note $C_n(S_n^1)$ la prime à l'instant n, quand le cours de l'action est S_n^1, du call de strike 200€ et d'écheance 3. Calculer les trois valeurs de $C_2(S_2^1)$ correspondant aux trois valeurs possibles du cours S_2^1 de l'action à l'instant 2.

6) On a vu que la valeur actualisée $\tilde{C}_n(S_n^1)$ de la prime à l'instant n satisfait une propriété, laquelle ? Expliquer comment ceci permet de calculer les $C_1(S_1^1)$ à partir des $C_2(S_2^1)$, puis $C_0(S_0^1)$ à partir des $C_1(S_1^1)$. Remplir l'arbre suivant avec les valeurs du call aux instants successifs, en fonction du cours de l'action.



7) On gère un portefeuille de couverture du call. A l'instant 1, on constate que le cours de l'action a monté, et on recompose le portefeuille en conséquence. Quelle quantité d'actions contient-il ? Décrire sa composition.

8) Ce modèle binomial est sans opportunité d'arbitrage, pourquoi ?

On est à l'instant 1 et le cours de l'action a baissé depuis l'instant initial. En utilisant la relation de parité, calculer la valeur de la prime du *put* de même échéance (trois mois) et même strike (200€) que le call ci-dessus.

Ex 2. On veut fabriquer un modèle à temps discret dans lequel les valeurs à l'instant n de l'actif sans risque et de l'action sont respectivement

$$S_n^0 = e^{rn} \quad \text{et} \quad S_n^1 = S_0^1 \prod_{k=1}^{n} \left(e^{\sigma Z_k + r - \frac{\sigma^2}{2}} \right)$$

Le taux d'intérêt r, la volatilité σ et le cours initial S_0^1 sont des réels strictement positifs fixés. Les Z_k sont des variables aléatoires gaussiennes.
On note P^* la probabilité sous laquelle les Z_k sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0; 1)$.
Le but est de montrer que P^* est risque-neutre.

1) Pour Z de loi $\mathcal{N}(0; 1)$ calculer l'espérance de la variable aléatoire $e^{\sigma Z}$.

2) Etablir un lien entre $\prod_{k=1}^{n} e^{\sigma Z_k}$ et l'espérance conditionnelles sous P^* de $\prod_{k=1}^{n+1} e^{\sigma Z_k}$ sachant la tribu $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$ qui représente l'ensemble des informations connues à l'instant n.

3) Exprimer le cours actualisé $\tilde{S}_n^1$ de l'action. Vérifier que $E_{P^*}\left(\tilde{S}_{n+1}^1 | \mathcal{F}_n\right) = \tilde{S}_n^1$.

Université Lille1
Sciences et Technologies

U.F.R. de Mathématiques

GIS 5 MathFi, 2013-2014 **M.Fradon**

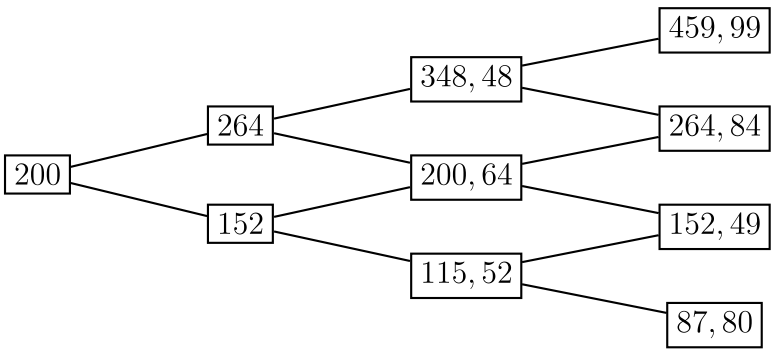
Mathématiques Financières
Corrigé de l'examen du 5 décembre 2013

Ex 1. 1) Puisqu'une année comporte 12 mois, un taux d'intérêt mensuel de $r = 0,001$ correspond à un taux annuel $r_a = (1+r)^{12} - 1 \simeq 1,207\%$.

2) La volatilité annuelle de cette action est $\sigma_a = \sqrt{12} \times 0,2766 \simeq 0,96$

3) La condition $d < 1 + r < u$ se traduit par $0,76 < 1,001 < 1,32$. Cette condition est satisfaite, donc ce modèle binomial admet une probabilité risque-neutre P^*, sous laquelle les tirages sucessifs de u ou d sont indépendants. Ils prennent la valeur u avec probabilité $p^* = \frac{1+r-d}{u-d} \simeq 0,43$ et la valeur d avec probabilité $1 - p^* \simeq 0,57$.

4) La valeur de l'action à l'instant n est $S_n^1 = S_0^1 \prod_{k=1}^n U_k$ où les U_k sont à valeurs dans $\{u; d\}$. L'instant n varie de 1 à $N = 3$:



	call	put
459, 99	259, 99	0
264, 84	64, 84	0
152, 49	0	47, 51
87, 80	0	112, 20

5) Le théorème de pricing indique que $C_2(S_2^1) = E_{P^*}\left(\frac{(S_3^1-200)_+}{1+r}|\mathcal{F}_2\right)$.

$$C_2(S_2^1) = E_{P^*}\left(\frac{(S_2^1U_2 - 200)_+}{1+r}|\mathcal{F}_2\right) = \frac{(S_2^1u - 200)_+}{1,001} \times 0,43 + \frac{(S_2^1d - 200)_+}{1,001} \times 0,57$$

Les valeurs possibles de $(S_3^1 - 200)_+$ ont été calculées à la question précédente :

$$C_2(348,48) = \frac{259,99}{1,001} \times 0,43 + \frac{64,84}{1,001} \times 0,57 \simeq 148,61$$

$$C_2(200,64) = \frac{64,84}{1,001} \times 0,43 + \frac{0}{1,001} \times 0,57 \simeq 27,85$$

et $C_2(115,52) = 0$ puisque $(S_3^1 - 200)_+$ est nulle quand l'action vaut 115, 52€ à l'instant 2.

6) On a vu que la valeur actualisée du portefeuille de couverture, c'est-à-dire la prime actualisée de l'option, est une martingale sous la probabilité risque-neutre. Autrement dit $\tilde{C}_n(S_n^1) = E_{P^*}\left(\tilde{C}_{n+1}(S_{n+1}^1)|\mathcal{F}_n\right)$ pour chaque n. En particulier $C_1(S_1^1) = (1+r)E_{P^*}\left(C_2(S_2^1)|\mathcal{F}_1\right) = 1,001 \times (C_2(S_1^1 u) \times 0,43 + C_2(S_1^1 d) \times 0,57)$ ce qui donne

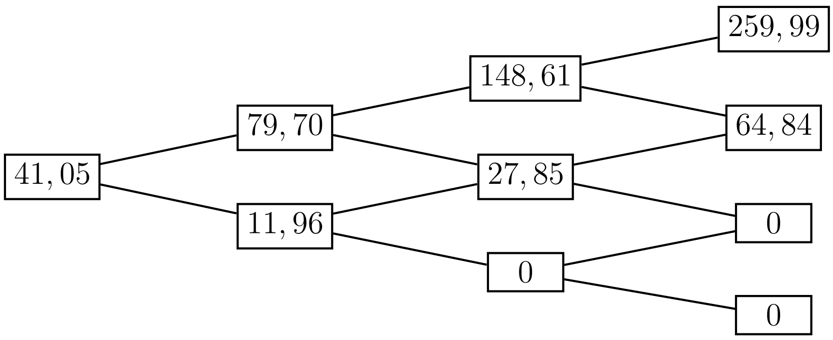
$$C_1(264) = \frac{1}{1,001}\left(C_2(348,48) \times 0,43 + C_2(200,64) \times 0,57\right) \simeq 79,70$$

$$C_1(152) = \frac{1}{1,001}\left(C_2(200,64) \times 0,43 + C_2(115,52) \times 0,57\right) \simeq 11,96$$

On procède de même pour la prime initiale

$$C_0(200) = \frac{1}{1,001}\left(C_1(264) \times 0,43 + C_2(152) \times 0,57\right) \simeq 41,05$$

Le graphe des valeurs du call est donc



7) On est à l'instant 1 et le cours actuel de l'action est 264€. La prime du call, qui est aussi la valeur liquidative du portefeuille de couverture, est de $79,70$€. Pour couvrir le call, la quantité d'action à avoir en portefeuille entre l'instant 1 et l'instant 2 est égale à

$$\Delta_2(264) = \frac{C_2(264u) - C_2(264d)}{264u - 264d}$$

On lit les valeurs $264u$, $264d$ et $C_2(264u)$, $C_2(264d)$ dans les arbres ci-dessus :

$$\Delta_2(264) = \frac{148,61 - 27,85}{348,48 - 200,64} \simeq 0,8168$$

L'achat de $\Delta_2(264)$ actions à 264€ coûte $215,64$€, ce qui oblige à faire un emprunt : le portefeuille est constitué de $0,8168$ actions et $79,70 - 215,64 = -135,94$€.

8) On a vérifié que ce modèle binomial a une probabilité risque-neutre. Il est donc sans opportunité d'arbitrage (Théorème de Harrison-Pliska).
On est à l'instant 1 et le cours actuel de l'action est de 152€. La prime $P_1(152)$ du put d'échéance trois mois et de strike $K = 200$€ satisfait la relation de parité

$$C_1(152) + (1+r)\frac{K}{(1+r)^3} = P_1(152) + 152$$

ce qui donne

$$P_1(152) = 11,96 + \frac{200}{1,001^2} - 152 \simeq 59,56\text{€}$$

Ex 2. 1) Pour Z de loi $\mathcal{N}(0;1)$ et $\sigma > 0$

$$E\left(e^{\sigma Z}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma x} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\sigma^2}{2}} \frac{e^{-\frac{(x-\sigma)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \, dx = e^{\frac{\sigma^2}{2}}$$

puisque la densité de la $\mathcal{N}(\sigma;1)$ est d'intégrale 1.

2) Les valeurs prises par $Z_1, \ldots, Z_n$ sont connues à l'instant n et Z_{n+1} est indépendante de l'information $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$ connue à l'instant n donc

$$E_{P^*}\left(\prod_{k=1}^{n+1} e^{\sigma Z_k} | \mathcal{F}_n\right) = \left(\prod_{k=1}^{n} e^{\sigma Z_k}\right) E_{P^*}\left(e^{\sigma Z_{n+1}} | \mathcal{F}_n\right) = \left(\prod_{k=1}^{n} e^{\sigma Z_k}\right) E_{P^*}\left(e^{\sigma Z_{n+1}}\right) = e^{\frac{\sigma^2}{2}} \prod_{k=1}^{n} e^{\sigma Z_k}$$

3) Le cours actualisé de l'action est

$$\tilde{S}_n^1 = \frac{S_n^1}{S_n^0} = \frac{S_0^1 \; e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})n} \; \prod_{k=1}^n e^{\sigma Z_k}}{e^{rn}} = S_0^1 \; e^{-\frac{\sigma^2}{2}n} \prod_{k=1}^{n} e^{\sigma Z_k}$$

qui vérifie la propriété de martingale sous P^* :

$$E_{P^*}\left(\tilde{S}_{n+1}^1 | \mathcal{F}_n\right) = S_0^1 \; e^{-\frac{\sigma^2}{2}(n+1)} \; E_{P^*}\left(\prod_{k=1}^{n+1} e^{\sigma Z_k} | \mathcal{F}_n\right) = S_0^1 \; e^{-\frac{\sigma^2}{2}(n+1)} \; e^{\frac{\sigma^2}{2}} \prod_{k=1}^{n} e^{\sigma Z_k} = \tilde{S}_n^1$$