Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

GIS 5 MathFi, 2010-2011 **M.Fradon**

Mathématiques Financières

Documents et calculatrices autorisés

Ex 1. Echauffement

On achète une option dont l'actif sous-jacent est une action de volatilité annuelle $0,40$ et de cours actuel 61 euros. Il s'agit d'une option de vente d'échéance neuf mois et de prix d'exercice 60 euros. Le taux d'intérèt annuel de l'actif sans risque est de 2%.
En utilisant la formule de black-Scholes, calculer la prime de cette option.

Ex 2. Cox-Ross-Rubinstein à deux périodes

On considère un modèle binomial à deux périodes. Il y a donc trois dates en tout : 0, 1 et 2. Le taux d'intérèt par période est $r = 0,05$, les mauvais et bon rendements sont respectivement $a = -0,05$ et $b = 0,1$, et le cours initial de l'action qui nous intéresse est $S_0^1 = 100$.

1) Donner la liste des cours S_1^1 que peut avoir l'action à l'instant 1, et la liste des cours S_2^1 qu'on peut avoir à l'instant 2.

2) Vérifier que ce modèle admet une probabilité risque-neutre et la calculer.

3) Un acheteur est intéressé par le call de strike 106 et d'échéance 2 sur cette action. Calculer la prime C_0 qu'il paiera à l'instant initial s'il achète ce call.

4) Si l'acheteur se porte acquéreur du call à l'instant 1 plutôt qu'à l'instant 0, quel prix C_1 devra-t-il payer ?
Attention, pensez à donner les deux prix C_1 correspondant aux deux situations possibles à l'instant 1. Dans l'une de ces deux situations, l'achat n'aura sans doute pas lieu : pourquoi ?

5) A l'instant 0, vous vendez un call de strike 106 et d'échéance 2, et par conséquent vous encaissez C_0 euros. Pour couvrir l'option que vous avez vendue, vous gérez cette somme C_0 en vous constituant un portefeuille : Combien achetez-vous d'actions[1] ? Combien d'argent placez-vous (ou empruntez-vous) au taux $r = 0,05$?
Indication : Ne pas se lancer dans de longs calculs, utiliser sans les redémontrer les expressions obtenues en cours et en TP.

6) A l'instant 1 vous constatez que le cours de l'action a monté et vaut $S_1^1 = 110$. Quelle est maintenant la valeur du portefeuille que vous avez constitué à la question précédente ? Pour continuer à couvrir le call vendu, modifiez-vous la composition de votre portefeuille ? (si oui, indiquer la nouvelle composition).

Ex 3. Conversion dollar euro

On s'intéresse au cours d'une action S cotée à Wall Street. On note S_t son prix en dollars à l'instant t. En utilisant le modèle de black-Scholes, on considère que le cours en dollars de cette action est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_s \, ds + \int_0^t \sigma S_s \, dB_s$$

[1] On suppose, ici comme en cours, qu'on peut acheter des quantités non-entières d'actions (i.e. qu'on vend toujours des quantités d'options assez grandes pour pouvoir négliger les arrondis à l'entier le plus proche dans la stratégie de couverture).

où μ et σ sont respectivement le rendement moyen et la volatilité de l'action.

On note D_t le cours du dollar en euros, c'est-à-dire le nombre d'euros qu'il faut pour acheter un dollar. On modélise les fluctuations du cours du dollar par l'équation différentielle stochastique :

$$D_t = D_0 + \int_0^t m\ D_s\ ds + \int_0^t v\ D_s\ dB_s$$

dans laquelle m et v sont des constantes supposées connues (en pratique on les évalue par des moyens statistiques).

Le prix $S_t^{€}$ de l'action, exprimé en euros, à l'instant t est par définition :

$$S_t^{€} = S_t\ D_t$$

1) Grâce à une intégration par parties, montrer que $S_t^{€}$ est solution d'une équation différentielle stochastique dont on déterminera les paramètres.

2) On sait résoudre les équations différentielles stochastiques de ce type : donner l'expression $S_t^{€}$ comme fonction du temps et du brownien.

3) En utilisant les solutions des équations différentielles stochastiques de $(S_t)_t$ et $(D_t)_t$, retrouver le résultat de la question précédente.

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

GIS 5 MathFi, 2010-2011 **M.Fradon**

Mathématiques Financières
Corrigé de l'examen de décembre 2010

Ex 1. Echauffement

D'après la formule de black-Scholes, la prime d'une option de vente est

$$P_0 = K\ e^{-rT}\ F(-d_1 + \sigma\sqrt{T}) - S_0\ F(-d_1) \quad \text{où} \quad d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + rT + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

Il suffit d'utiliser cette formule en veillant à exprimer les paramètres dans des unités cohérentes : plutôt que de déduire du taux d'intérèt annuel $r = 0,02$ et de la volatilité annuelle $\sigma = 0,40$ les taux d'intérèt et volatilité mensuels, on convertit l'échéance de neuf mois en $T = 0,75$ années. Le prix actuel de l'action $S_0 = 61$ et le prix d'exercice $K = 60$ sont en euros, la prime calculée le sera donc aussi.

$$d_1 \simeq 0,2642223 \quad \text{et donc} \quad P_0 \simeq 60\ e^{-0,015}\ F(0,0822) - 61\ F(-0,2642)$$

et comme F représente ici la fonction de répartition de la $\mathcal{N}(0,1)$, on obtient la prime :

$$P_0 \simeq 60\ e^{-0,015}\ 0,5319 - 61\ (1 - 0,6026) \simeq 7,20 \text{ euros.}$$

en lisant directement dans la table des valeurs de la gaussienne.

En effectuant la correction de continuité à partir des valeurs tabulées, on peut obtenir un résultat un peu plus précis :

$$P_0 \simeq 60\ e^{-0,015}\ 0,53278 - 61\ (1 - 0,604196) \simeq 7,35 \text{ euros.}$$

Ex 2. Cox-Ross-Rubinstein à deux périodes

1) Dans ce modèle binomial à deux périodes, l'actif sans risque évolue au taux fixe $r = 0,05$:

$$S_0^0 = 1 \quad S_1^0 = (1+r) = 1,05 \quad S_2^0 = (1+r)^2 = 1,1025$$

et deux variables aléatoires U_1 et U_2 à valeurs dans $\{a; b\} = \{-0,05\ ;\ 0,1\}$ définissent le cours de l'action :

$$S_0^1 \quad S_1^1 = S_0^1(1+U_1) \quad S_2^1 = S_0(1+U_1)(1+U_2)$$

Les prix possibles sont :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & S_2^1 = 100(1+b)^2 = 121 \\
 & & & \nearrow & \\
 & & S_1^1 = 100(1+b) = 110 & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
S_0^1 = 100 & & & & S_2^1 = 100(1+a)(1+b) = 104,5 \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & S_1^1 = 100(1+a) = 95 & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & S_2^1 = 100(1+a)^2 = 90,25
\end{array}$$

2) On sait que le modèle admet une probabilité risque-neutre dès lors que $a < r < b$, ce qui est le cas ici puisque $-0,05 < 0,05 < 0,1$. Cette probabilité risque-neutre est unique. Elle rend U_1 et U_2 indépendants et de même loi donnée par :

$$P^*(U_i = 0,1) = \frac{r-a}{b-a} = \frac{0,1}{0,15} = \frac{2}{3} \qquad P^*(U_i = -0,05) = 1 - P^*(U_i = 0,1) = \frac{1}{3}$$

3) La prime du call de strike $K = 106$ et d'échéance 2 est donnée par :

$$C_0 = E_{P^*}\left(\frac{\max(S_2^1 - K\ ,\ 0)}{S_2^0}\right) = \frac{1}{1,1025}E_{P^*}\left((S_2^1 - 106)\mathbb{1}_{S_2^1>106}\right)$$

Or S_2^1 ne dépasse la valeur 106 que s'il est égal à 121. Cela ne se produit que lorsqu'on a tiré deux fois de suite le rendement b, donc avec probabilité $(2/3)^2$ sous P^* :

$$C_0 = \frac{1}{1,1025}(121-106)\left(\frac{2}{3}\right)^2 \simeq 6,05 \text{ €}$$

4) Les valeurs possibles du call à l'instant 1 sont données par :

$$C_1 = E_{P^*}\left(\frac{S_1^0\ \max(S_2^1 - K\ ,\ 0)}{S_2^0} \mid \mathcal{F}_1\right) = \frac{1}{1,05}E_{P^*}\left(\max(S_0^1(1+U_1)(1+U_2) - 106\ ,\ 0) \mid \mathcal{F}_1\right)$$

A l'instant 1, la valeur de $S_0^1(1+U_1)$ est connue, elle peut valoir 110 ou 95.

Si elle vaut 110, comme U_2 est indépendant de $\mathcal{F}_1$ sous P^*, on a :

$$C_1(110) = \frac{1}{1,05}E_{P^*}\left((110(1+U_2) - 106)\mathbb{1}_{110(1+U_2)>106}\right)$$

Puisque U_2 prend les valeurs $0,1$ et $-0,05$ avec les probabilités $2/3$ et $1/3$ respectivement, et que $110(1+0,1) = 121$ et $110(1-0,05) = 104,5$:

$$C_1(110) = \frac{1}{1,05}\left((121-106)\mathbb{1}_{121>106} \times \frac{2}{3} + (104,5-106)\mathbb{1}_{104,5>106} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{1,05}\left(15 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{1}{3}\right)$$

ce qui donne $C_1(110) = 9,5238$ euros.

Dans le cas où $S_0^1(1+U_1)$ a pris la valeur 95, puisque $95(1+0,1) = 104,5$ et $95(1-0,05) = 90,25$, l'expression de C_1 devient :

$$C_1(95) = \frac{1}{1,05}\left((104,5-106)\mathbb{1}_{104,5>106} \times \frac{2}{3} + (90,25-106)\mathbb{1}_{90,25>106} \times \frac{1}{3}\right) = 0$$

On pouvait deviner ce résulat : quand l'action vaut 95€ à l'instant 1, elle ne peut pas valoir plus que 106€ à l'instant final. Dès lors, le droit de l'acheter à 106€ à l'instant final ne vaut plus rien (et donc personne n'achétera un tel call).

5) A l'instant initial, on vend un call et on encaisse $C_0 = 6,05$€. La stratégie de couverture consiste à gérer cette somme de façon à ce que la valeur de notre portefeuille soit en permanence égale à la valeur du call : on démarre avec une valeur de portefeuille $V_0 = C_0$, on fait en sorte que sa valeur V_1 à l'instant 1 soit égale à C_1, et on veille ensuite à ce que sa valeur V_2 soit égale à la somme $C_2 = \max(S_2^1 - K, 0)$ que l'on devra verser au détenteur du call à l'échéance. On a vu en TP qu'à chaque étape, la stratégie consiste à détenir un nombre d'action Δ_i égal à l'écart entre les deux prix possibles pour le call à l'instant suivant, divisée par l'écart entre les prix correspondants de l'action. En particulier, on démarre avec un portefeuille contenant Δ_1 actions :

$$\Delta_1 = \frac{C_1(100(1+b)) - C_1(100(1+a))}{100(1+b) - 100(1+a)} = \frac{C_1(110) - C_1(95)}{110-95} = \frac{9,5238-0}{15} = 0,6349$$

et une somme placée égale à $6,05 - 100\Delta_1 = -57,44$. Autrement dit, on a en portefeuille $0,6349$ actions et un emprunt de $57,44$€, ce qui donne bien une valeur totale de $6,05$€.

6) A l'instant 1 on constate que le cours de l'action a monté et vaut $S_1^1 = 110$. Le portefeuille constitué à la question précédente a maintenant une valeur de :

$$V_1(110) = 0,6349 \times 110 + (-57,44) \times (1 + 0,05) = 9,527$$

La valeur trouvée serait égale à $C_1(110) = 9,524$€ si on calculait avec une précision infinie. L'écart de trois dixièmes de centime vient des arrondis successifs.

On doit recomposer notre portefeuille pour qu'il contienne

$$\Delta_2 = \frac{C_2(110(1+b)) - C_2(110(1+a))}{110(1+b) - 110(1+a)} = \frac{\max(121 - 106,0) - \max(104,5 - 106,0)}{121 - 104,5} = \frac{15 - 0}{16,5} = 0,9091$$

actions et $9,527 - 0,9091 \times 110 = -90,47$ euros.

On aura alors la certitude qu'à l'instant final, quel que soit le cours de l'action, la valeur du portefeuille couvrira exactement la somme à verser au détenteur du call (aux imprécisions d'arrondi près).

Ex 3. Conversion dollar euro

1) Le prix en euros $S_t^€$ de l'action est égal au produit du prix en dollar S_t et du prix du dollar D_t. Ces deux derniers prix sont des processus d'Ito dont on connait une décomposition. La formule d'intégration par parties stochastique donne :

$$S_t D_t = S_0 D_0 + \int_0^t S_s \, dD_s + \int_0^t D_s \, dS_s + < S, D >_t$$

Or on sait que $S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_s \, ds + \int_0^t \sigma S_s \, dB_s$ et $D_t = D_0 + \int_0^t m D_s \, ds + \int_0^t v D_s \, dB_s$

Par conséquent $< S, D >_t = \int_0^t \sigma v S_s D_s \, ds = \int_0^t \sigma v S_s^€ \, ds$ et en remplaçant dD_s et dS_s dans la formule d'intégration par parties on obtient :

$$S_t^€ = S_0^€ + \int_0^t S_s \, m D_s \, ds + \int_0^t S_s \, v D_s \, dB_s + \int_0^t D_s \, \mu S_s \, ds + \int_0^t D_s \, \sigma S_s \, dB_s + \int_0^t \sigma v S_s^€ \, ds$$

Ce qui donne en regroupant :

$$S_t^€ = S_0^€ + \int_0^t (m + \mu + \sigma v) S_s^€ \, ds + \int_0^t (v + \sigma) S_s^€ \, dB_s$$

2) On a vu en cours que cette équation différentielle stochastique a pour solution :

$$S_t^€ = S_0^€ e^{(m+\mu+\sigma v-(v+\sigma)^2/2)t+(v+\sigma)B_t} = S_0^€ e^{(m+\mu-(v^2+\sigma^2)/2)t+(v+\sigma)B_t}$$

3) De même, les équations différentielles stochastiques satisfaites par le cours en dollars de l'action et par le cours du dollar ont pour solutions :

$$S_t = S_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma B_t} \qquad \text{et} \qquad D_t = D_0 e^{(m-v^2/2)t+vB_t}$$

donc le produit $S_t^€ = S_t \; D_t$ vérifie :

$$S_t^€ = S_0 D_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma B_t} e^{(m-v^2/2)t+vB_t} = S_0^€ e^{(m+\mu-(v^2+\sigma^2)/2)t+(v+\sigma)B_t}$$

On retrouve le résultat de la question précédente.