**Université des Sciences et Technologies de Lille**
**U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées**

**GIS 5 MathFi, 2008-2009** **M.Fradon**

# Mathématiques Financières

*Documents et calculatrices autorisés*

**Ex 1.** *Fixed Return Option, quelques généralités*

On considère une action $S$ de rendement moyen annuel $\mu = 0,03$ et de volatilité annuelle $\sigma = 0,38$. On veut calculer la prime des options binaires sur l'action $S$ :
Le détenteur d'un call binaire reçoit 100€ à l'échéance $T$ si le cours $S_T$ de l'action à cette date dépasse le prix d'exercice $K$. Il ne reçoit rien sinon.
Le détenteur d'un put binaire reçoit 100€ à l'échéance $T$ si le cours de l'action à cette date ne dépasse pas le prix d'exercice $K$. Il ne reçoit rien dans le cas contraire.

1) On note $B_t^+$ et $B_t^-$ les prix respectifs du call et du put binaires à l'instant $t$. Quelle est l'expression des flux monétaires $B_T^+$ et $B_T^-$ reçus à l'échéance par les détenteurs des options binaires ?

2) Le taux d'intérèt annuel, auquel on peut emprunter ou placer de l'argent, est $r = 0,05$. On note $S^0$ l'actif sans risque évoluant à ce taux. Préciser dans quel cadre on a la relation de parité suivante, et la justifier :

$$B_t^+ + B_t^- = 100\ \frac{S_t^0}{S_T^0}$$

**Ex 2.** *Fixed Return Option, modèle binomial*

1) Pour calculer la prime d'une option binaire d'échéance 6 mois sur cette action, on décide d'utiliser le modèle de Cox, Ross et Rubinstein avec $N = 126$ périodes, la période étant la journée. Le taux d'intérèt par période est $r_p = 0,000195$ et les deux rendements possibles sont $a = e^{-\sigma_p}(1 + r_p) - 1$ et $b = e^{\sigma_p}(1 + r_p) - 1$ avec la volatilité par période $\sigma_p = 0,0239$. Expliquer pourquoi à la volatilité annuelle de $\sigma = 0,38$ correspond une volatilité par jour de $\sigma_p = 0,0239$.

2) Démontrer que dans le cadre de ce modèle binomial, la prime à l'instant initial du call binaire d'échéance 6 mois est

$$B_0^+ = \frac{100}{(1 + r_p)^N}(1 - F_{\mathcal{B}}(d))$$

où $F_{\mathcal{B}}$ est la fonction de répartition d'une loi binomiale dont on donnera les paramètres, et où $d$ est un nombre à déterminer, qui dépend des caractéristiques de l'option.

3) Application numérique :
On veut calculer les primes à l'instant zéro du call binaire et du put binaire de prix d'exercice $K = 15$€ et d'échéance 6 mois sur l'action considérée. Le prix actuel de l'action est de $S_0 = 15$€.
Montrer que dans ce cas la loi et le nombre construits à la question précédente prennent les valeurs $\mathcal{B}in(126; 0,494)$ et $d = 62,486$. En déduire les deux primes demandées.

**Ex 3.** *Fixed Return Option, modèle de Black-Scholes*

1) En utilisant le modèle de Black-Scholes, calculer les prix à l'instant initial du call binaire et du put binaire de prix d'exercice $K$ et d'échéance $T$.

2) Application numérique :
Toujours dans le cas où le prix actuel de l'action est $S_0 = 15€$, calculer le prix à $t = 0$ dans le modèle de Black-Scholes du call binaire et du put binaire de prix d'exercice $K = 15€$ et d'échéance 6 mois sur cette action.

3) Il est d'usage de dire que l'option binaire est la dérivée par rapport au prix d'exercice de l'option vanille correspondante (l'option vanille est l'option "classique", celle de flux monétaire $(S_T - K)_+$ pour un call et $(K - S_T)_+$ pour un put). Rectifier et justifier cette affirmation. En déduire une autre façon de calculer les primes du call et du put binaire, directement à partir de la formule de Black-Scholes, sans calcul d'espérance.

**Université des Sciences et Technologies de Lille**
**U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées**

**GIS 5 MathFi, 2008-2009** **M.Fradon**

# Mathématiques Financières
# Corrigé de l'examen de décembre 2008

**Ex 1.** *Fixed Return Option, quelques généralités*

1) Le détenteur d'un call binaire reçoit 100€ si le cours de l'action à l'échéance $T$ dépasse le prix d'exercice $K$ et ne reçoit rien sinon. Donc le flux monétaire qu'il encaisse à l'échéance est :

$$B_T^+ = 100 \ \mathbb{1}_{S_T > K}$$

De même, le put binaire rapporte 100€ à l'échéance $T$ si le cours final $S_T$ de l'action ne dépasse pas $K$, et rien dans le cas contraire. Donc il engendre un flux monétaire :

$$B_T^- = 100 \ \mathbb{1}_{S_T \leqslant K}$$

2) Comparons un portefeuille constitué d'un call et d'un put binaires de même prix d'exercice et de même échéance, et un autre portefeuille constitué du montant d'actif sans risque nécessaire pour avoir 100€ à l'échéance.
Le premier portefeuille vaut à l'instant $t$ : $B_t^+ + B_t^-$
Le second vaut 100 à l'instant final et donc $100/S_T^0$ à l'instant initial, entre ces instant sa valeur évolue au taux $r$ de sorte qu'il vaut $100 S_t^0/S_T^0$ à l'instant $t$.
Dans le cadre d'un marché sans opportunité d'arbitrage, deux portefeuilles qui prendront de façon certaine la même valeur dans le futur doivent avoir la même valeur à chaque instant :

$$B_t^+ + B_t^- = 100 \ \frac{S_t^0}{S_T^0} \quad \text{pour tout } t$$

Donc il suffit de pricer le call, par exemple, et la prime du put s'en déduira.

**Ex 2.** *Fixed Return Option, modèle binomial*

1) Puisqu'on divise la durée de 6 mois en 126 périodes d'une journée, l'année correspondra à 252 périodes (il s'agit de jours ouvrables uniquement). La volatilité annuelle $\sigma = 0,38$ est l'écart-type du rendement annuel, qui est la somme des 252 rendements journaliers. Ces rendements étant supposés indépendants, la variance de leur somme est égale à la somme de leurs variance :

$$\sigma^2 = 252\sigma_p^2 \quad \text{c'est-à-dire } \sigma_p = \frac{\sigma}{\sqrt{252}} \simeq 0,0239$$

2) On sait que le modèle de Cox, Ross et Rubinstein décrit un marché viable et complet si $-1 < a < r_p < b$, autrement dit si $0 < 1 + a < 1 + r_p < 1 + b$. C'est bien le cas ici puisque $0 < e^{-\sigma_p}(1 + r_p) < 1 + r_p < e^{\sigma_p}(1 + r_p)$. Il y a donc une unique probabilité risque-neutre $P^*$ sous laquelle le prix de l'action à l'instant $n$ est :

$$S_n = S_0(1 + U_1)(1 + U_2) \dots (1 + U_n)$$

avec les $U_i$ indépendants et tels que

$$P^*(U_i = b) = \frac{r_p - a}{b - a} = \frac{1 - e^{-\sigma_p}}{e^{\sigma_p} - e^{-\sigma_p}} \quad \text{et} \quad P^*(U_i = b) = \frac{b - r_p}{b - a} = \frac{e^{\sigma_p} - 1}{e^{\sigma_p} - e^{-\sigma_p}}$$

La prime à l'instant initial du call binaire d'échéance 6 mois et de prix d'exercice $K$ est alors

$$B_0^+ = E_{P^*}\left(\frac{100\ \mathbb{I}_{S_N>K}}{S_0^N}\right) = \frac{100}{(1+r_p)^N}\ P^*\left(S_N > K\right) = \frac{100}{(1+r_p)^N}\ P^*\left(S_0(1+U_1)\ldots(1+U_N) > K\right)$$

$$= \frac{100}{(1+r_p)^N}\ P^*\left(S_0(1+b)^J(1+a)^{N-J} > K\right)$$

où le nombre $J$ de fois où on a obtenu le rendement $b$ suit la loi binomiale de paramètres $N$ et $\frac{1-e^{-\sigma_p}}{e^{\sigma_p}-e^{-\sigma_p}}$. Puisque $1+a = e^{-\sigma_p}(1+r_p)$ et $1+b = e^{\sigma_p}(1+r_p)$ on obtient :

$$B_0^+ = \frac{100}{(1+r_p)^N}\ P^*\left(e^{J\sigma_p}(1+r_p)^J e^{-(N-J)\sigma_p}(1+r_p)^{N-J} > \frac{K}{S_0}\right)$$

$$= \frac{100}{(1+r_p)^N}\ P^*\left((2J-N)\sigma_p + N\ln(1+r_p) > \ln(K/S_0)\right)$$

Ce qui donne :

$$B_0^+ = \frac{100}{(1+r_p)^N}\ P^*\left(J > \frac{\ln(K/S_0) + N\sigma_p - N\ln(1+r_p)}{2\sigma_p}\right) = \frac{100}{(1+r_p)^N}(1 - F_{\mathcal{B}}(d))$$

où $d = \dfrac{\ln(K/S_0)}{2\sigma_p} + \dfrac{N}{2} - \dfrac{N\ln(1+r_p)}{2\sigma_p}$ et où $F_{\mathcal{B}}$ est la fonction de répartition de la loi binomiale $\mathcal{B}in(N; \frac{1-e^{-\sigma_p}}{e^{\sigma_p}-e^{-\sigma_p}})$.

3) Application numérique :

Ici, on demande de pricer une option à la monnaie : $K = S_0$. La prime du call est donc :

$$B_0^+ = \frac{100}{(1+r_p)^N}\ P^*\left(J > \frac{N}{2} - \frac{N\ln(1+r_p)}{2\sigma_p}\right)$$

En remplaçant par les valeurs numériques, on obtient :

$$B_0^+ = \frac{100}{(1,000195)^{126}}\ P^*\left(J > \frac{126}{2} - \frac{126\ln(1,000195)}{2\times 0,0239}\right) \simeq \frac{100}{(1,000195)^{126}}\ P^*\left(J > 62,486\right)$$

où $J$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}in(126; 0,494)$.

Puisque 126 est assez grand, le théorème central limite permet d'approcher la loi de $J^* = \frac{J-126\times 0,494}{\sqrt{126\times 0.494\times 0.506}}$ par la loi $\mathcal{N}(0;1)$, ce qui donne :

$$P^*\left(J > 62,486\right) = P^*\left(J^* > \frac{62,486 - 126\times 0,494}{\sqrt{126\times 0.494\times 0.506}}\right) \simeq P^*(J^* > 0.043) \simeq 1 - 0,517 = 0.483$$

d'après la table de la fonction de répartition de la $\mathcal{N}(0;1)$.

On en déduit la prime du call binaire :

$$B_0^+ \simeq \frac{100}{(1,000195)^{126}} \times 0.483 \simeq 47,13€$$

Puis on utilise la relation de parité pour calculer la prime du put :

$$B_0^+ + B_0^- = \frac{100}{1,000195^{126}} \quad \text{donc} \quad B_0^- = \frac{100}{(1,000195)^{126}} \times (1 - 0.483) \simeq 50,45€$$

**Ex 3.** *Fixed Return Option, modèle de Black-Scholes*

1) L'option qui génère un flux monétaire $B_T^+ = 100 \; \mathbb{1}_{S_T > K}$ à l'instant final est simulable dans le modèle de Black-Scholes, puisqu'on aura $E_{P^*}\left((100 \; \mathbb{1}_{S_T>K})^2\right) < +\infty$ (le flux monétaire est borné, il ne dépasse jamais 100€). Pour cette option, la prime à l'instant initial est donc :

$$B_0^+ = E_{P^*}\left(e^{-rT} 100 \; \mathbb{1}_{S_T>K}\right) = 100 \; e^{-rT} P^*(S_T > K)$$

Pour calculer ceci, on utilise le fait que $S_T = S_0 \; e^{rT} \; e^{\sigma B_T^* - \sigma^2 T/2}$ où $B^*$ est un brownien sous la probabilité risque-neutre $P^*$ :

$$B_0^+ = 100 \; e^{-rT} P^*\left(e^{rT} \; e^{\sigma B_T^* - \sigma^2 T/2} > \frac{K}{S_0}\right) = 100 \; e^{-rT} P^*\left(\sigma B_T^* - \frac{\sigma^2}{2} T > \ln(\frac{K}{S_0}) - rT\right)$$

Puisque le brownien à l'instant $T$ suit la loi gaussienne centrée d'écart-type $\sqrt{T}$, en notant $Z$ une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0;1)$ on peut réécrire l'inégalité ci-dessus en :

$$B_0^+ = 100 \; e^{-rT} P^*\left(\sigma\sqrt{T} Z > \ln(\frac{K}{S_0}) - rT + \frac{\sigma^2}{2} T\right)$$

ou encore, en utilisant la symétrie de la loi $\mathcal{N}(0;1)$ :

$$B_0^+ = 100 \, e^{-rT} P^*\left(Z > \frac{-\ln(S_0/K) - rT + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = 100 \, e^{-rT} P^*\left(Z \leqslant \frac{\ln(S_0/K) + rT - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

On a établi au premier exercice la relation de parité $B_0^+ + B_0^- = 100 \; \frac{1}{e^{rT}}$. On peut donc déduire la prime du put binaire de celle du call binaire qu'on vient de calculer :

$$B_0^- = 100 \; e^{-rT} P^*\left(Z \leqslant \frac{-\ln(S_0/K) - rT + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

2) Application numérique :
On cherche à calculer les primes des options binaires dans le cas où le prix d'exercice $K$ est égal au cours initial $S_0$. Les formules ci-dessus se réduisent alors à :

$$B_0^+ = 100 \; e^{-rT} P^*\left(Z \leqslant \frac{rT - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = 100 \; e^{-rT} P^*\left(Z \leqslant (\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})\sqrt{T}\right)$$

$$B_0^- = 100 \; e^{-rT} P^*\left(Z \leqslant \frac{-rT + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = 100 \; e^{-rT} P^*\left(Z \leqslant (-\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2})\sqrt{T}\right)$$

Ici, $T = 0,5$, $r = 0,05$ et $\sigma = 0,38$. En utilisant la table de la fonction de répartition de la $\mathcal{N}(0;1)$, on obtient que la prime du call binaire est égale à :

$$B_0^+ \simeq 100 \; e^{-0.025} P^* \left(Z \leqslant -0,041\right) \simeq 100 \; e^{-0.025} \; 0,4840 = 47,20€$$

et que celle du put binaire vaut :

$$B_0^- \simeq 100 \; e^{-0.025} P^* \left(Z \leqslant 0,041\right) \simeq 100 \; e^{-0.025} \; 0,5160 = 50,33€$$

Comme on pouvait s'y attendre, la différence entre les primes calculées en utilisant le modèle binomial et celles calculées en utilisant le modèle de Black-Scholes est faible, de l'ordre de 0,16% (et une bonne partie de cette différence est due aux arrondis successifs imposés par l'utilisation de la calculatrice et de la table de valeurs numériques...).

3) Les flux monétaires des calls et puts vanilles sont :

$$C_T = (S_T - K)\ \mathbb{1}_{S_T > K} \quad \text{et} \quad P_T = (K - S_T)\ \mathbb{1}_{S_T \leqslant K}$$

En dérivant ces quantité par rapport au strike $K$, on obtient pour tout $K$ différent de $S_T$ :

$$B_T^+ = 100\ \mathbb{1}_{S_T > K} = -100 \frac{dC_T}{dK} \quad \text{et} \quad B_T^- = 100\ \mathbb{1}_{S_T \leqslant K} = 100 \frac{dP_T}{dK}$$

Les flux monétaires des options binaires sont donc, à constantes prêt, égaux aux dérivées par rapport au strike des flux monétaires des options vanilles. La prime d'une option est l'espérance du flux monétaire sous la probabilité risque-neutre (au coefficient d'actualisation prêt). On peut en déduire que les primes des options binaires s'obtiennent (aux mêmes constantes prêt) comme les dérivées des primes des options vanilles. Il suffit d'échanger l'espérance et la dérivation. Justifions cet échange pour le call (le cas du put est analogue). Pour chaque $K$ :

$$\frac{(S_T - K - \varepsilon)\mathbb{1}_{S_T > K+\varepsilon} - (S_T - K)\mathbb{1}_{S_T > K}}{\varepsilon} \text{ converge } P^*\text{-presque surement vers } -\mathbb{1}_{S_T > K}$$

puisque la convergence a lieu sur $\{S_T \neq K\}$. De plus, si $\varepsilon > 0$ :

$$\left| \frac{(S_T - K - \varepsilon)\mathbb{1}_{S_T > K+\varepsilon} - (S_T - K)\mathbb{1}_{S_T > K}}{\varepsilon} \right| \leqslant \frac{S_T - K}{\varepsilon} \mathbb{1}_{K+\varepsilon \geq S_T > K} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \mathbb{1}_{S_T > K+\varepsilon} \leqslant 1$$

et si $\varepsilon < 0$ :

$$\left| \frac{(S_T - K - \varepsilon)\mathbb{1}_{S_T > K+\varepsilon} - (S_T - K)\mathbb{1}_{S_T > K}}{\varepsilon} \right| \leqslant \frac{S_T - K - \varepsilon}{\varepsilon} \mathbb{1}_{K \geq S_T > K+\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \mathbb{1}_{S_T > K+\varepsilon} \leqslant 1$$

Donc le théorème de convergence dominée permet d'échanger la limite en $\varepsilon$ et l'espérance :

$$E_{P^*}(-\mathbb{1}_{S_T > K}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{E_{P^*}((S_T - K - \varepsilon)\mathbb{1}_{S_T > K+\varepsilon}) - E_{P^*}((S_T - K)\mathbb{1}_{S_T > K})}{\varepsilon} = \frac{dC_0}{dK}$$

et la prime du call binaire est donc la dérivée de la prime du call vanille :

$$B_0^+ = -100\ \frac{dC_0}{dK}$$

D'après la formule de Black-Scholes :

$$C_0 = S_0 F_{\mathcal{N}} \left( \frac{\ln(S_0/K) + rT + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - \frac{K}{e^{rT}} F_{\mathcal{N}} \left( \frac{\ln(S_0/K) + rT - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}} \right)$$

En dérivant ceci par rapport à $K$, on obtient :

$$\frac{dC_0}{dK} = -\frac{1}{e^{rT}} F_{\mathcal{N}} \left( \frac{\ln(S_0/K) + rT - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}} \right)$$

On retrouve bien l'expression de $B_0^+$ trouvée à la première question. Un calcul analogue, ou la relation de parité, donne l'expression de $B_0^-$.