Université Lille 1 | **Département de Mathématiques** | **M.Fradon**
MASS L2 S4 | **Calcul Différentiel** | **2017-2018**

Fiche 5 (pas de fiche 4, pour raisons historiques)

Ex 1. Isopérimétrie

1) Quelle est la plus grande aire qui peut être contenue dans un rectangle de périmètre fixé p ? (examen juin 2014)

2) Les colis postaux non surtaxés doivent avoir une hauteur, largeur et longueur entre 1cm et 1m. La somme longueur+largeur+hauteur ne doit pas dépasser 150cm. Quel est le plus grand volume qu'on peut envoyer ?

3) Qu'appelle-t-on *inegalite arithmetico-geometrique* ? Expliquer quel est le rapport avec le volume maximal des envois postaux.

Ex 2. Examen juin 2013

Que vaut dy/dx quand $y = 1 + y^x$?

Ex 3. Tangentes aux courbes de niveau

1) Au voisinage de $x = 0$ et $y = 0$, la fonction $y = g(x)$ déterminée par l'équation $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ est bien définie : le prouver. Quelle droite approxime le mieux la fonction g lorsque x est proche de 0 ?

2) Même question concernant l'approximation au voisinage de $x = 4$ et $y = 2$ de la fonction $y = h(x)$ déterminée par l'équation $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 8$.

3) Peut-on prolonger la fonction h ci-dessus en une fonction donnant y en fonction de x tel que $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 8$ pour tout x ? La prolonger le plus largement possible, en expliquant pourquoi on ne peut pas aller au-delà.

4) Dessiner le graphe et les courbes de niveau de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$. Tracer les droites ci-dessus comme tangentes à deux courbes de niveau (lesquelles ?).

Ex 4. A partir du partiel de mars 2011

1) Montrer qu'au voisinage de $(0, 0)$, l'équation $z^3 - z + \sin(xe^y) = 0$ définit une fonction implicite $z = g(x, y)$ telle que $g(0, 0) = 0$.

2) Calculer le gradient de g.

3) Donner le développement limité à l'ordre 1 de g en $(0, 0)$.

4) Montrer qu'au voisinage de $(0, 0)$, l'équation $z^3 - z + \sin(xe^y) = 0$ définit aussi une fonction implicite $z = h(x, y)$ telle que $g(0, 0) = 1$ et donner son développement limité.

Ex 5. (Examen, mai 2016)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x + e^{y+z} - 1, x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - z)$. À x fixé, on pose $g(y, z) = f(x, y, z)$.

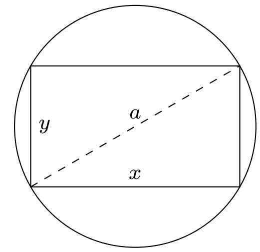
1) Calculer la matrice jacobienne de g.

2) Montrer qu'il existe un intervalle ouvert A contenant 0, un voisinage ouvert $B \subset \mathbb{R}^2$ de $(0, 0)$ et une application Φ, $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$, $x \in A$, tels que $\Phi(0) = (0, 0)$ et $f(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) = 0$ pour tout $x \in A$.

3) Calculer la dérivée $\Phi'(0) = (\varphi_1'(0), \varphi_2'(0))$.

Ex 6. Le tronc d'arbre (Examen, mai 2016)

On dispose d'un tronc d'arbre cylindrique de diamètre a. On veut fabriquer une poutre rectangulaire de largeur x et d'épaisseur y. Pour l'usage qu'on veut en faire, la résistance de la poutre sera proportionnelle à sa largeur et au carré de son épaisseur.



Trouver les dimensions de la poutre la plus forte possible.

Ex 7. Un consommateur, dans un magasin, achète une quantité x d'une certain produit et une quantité y d'un autre produit. Son budget pour le tout est de 50 euros. Le premier produit coûte 1 euro et le second en coûte 2. Et 10 exemplaires seulement du second produit sont en stock.

1) Pour maximiser sa fonction d'utilité $U(x, y) = x^{3/4}y^{1/2}$, que doit faire le consommateur ? Donner une réponse en dessinant la zone sur laquelle on maximise U et en utilisant les multiplicateurs de Lagrange.

2) Dans un cas simple comme celui-ci, on peut se passer des multiplicateurs de Lagrange. Comment ?

Ex 8.

1) *Examen mai 2014 :* Soient α et β deux nombres strictement positifs. Trouver la valeur minimale de la fonction $x^\alpha/\alpha + y^\beta/\beta$ sous la contrainte $xy = 1$ pour $x > 0$, $y > 0$.

2) *Et pour aller plus loin :* Soient α, β et γ trois nombres strictement positifs. Trouver la valeur minimale de la fonction $x^\alpha/\alpha + y^\beta/\beta + z^\gamma/\gamma$ sous la contrainte $xyz = 1$ avec $x, y, z > 0$.

Ex 9. Maximisation sur ligne de niveau (examen mai 2012)

On représente dans le même repère les deux fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

$$f(x, y) = 12xy + x^2 + 2y^2 \quad \text{et} \quad g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 25$$

On parcourt le graphe de f tout le long de la ligne de niveau $g = 0$. A quel endroit atteint-on une valeur maximale, et combien vaut-elle ? A quel endroit atteint-on une valeur minimale, et combien vaut-elle ?

Ex 10. Le tipi

Un tipi est une tente conique de hauteur h et de rayon r. Son volume habitable (volume du cône) est $\frac{\pi}{3}r^2h$ et sa surface (surface du cône) est $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$. Maximiser le volume habitable du tipi sous la contrainte que la surface de toile disponible pour le construire est de $28,3\text{m}^2$ (on simplifiera les calculs en utilisant le fait que $28,3 \simeq 9\pi$).