Université Lille 1	U.F.R. de Mathématiques	M.Fradon
MASS L2 S4	Probabilités Discrètes	2016-2017

Fiche 4

Ex 1. Lire une petite loi

Voici la loi de la variable aléatoire V :

$V(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et

k	0	1	2	3
$P(V = k)$	0,35	0,30	0,25	0,10

1) Justifier pourquoi la variable aléatoire V a des moments de tous ordres.
2) Calculer l'espérance de V.
3) Calculer sa variance.
4) Calculer $E\Big((V-1)^3\Big)$.
5) Tracer le graphe de la fonction de répartition F_V de V.

Ex 2. Feu de signalisation (mai 2007)

Devant un feu de signalisation passent, sur une seule file, trois types de véhicules, dans les proportions suivantes :
— 70% de voitures
— 25% de camions
— 5% de semi-remorques

Les voitures ont une longueur de 5 m, les camions de 10 m et les semi-remorques de 20 m. Trois véhicules s'arrêtent au feu rouge. On appelle L la variable aléatoire égale à la longueur totale de chaussée qu'ils occupent. Calculer $\mathbb{E}(L)$.

Ex 3. On considère un vecteur aléatoire $\mathbf{Z} = (X, Y)$ dont la loi est donnée par :

$$P(\mathbf{Z} = (1,2)) = 0,1 \qquad P(\mathbf{Z} = (1,4)) = 0,15 \qquad P(\mathbf{Z} = (3,2)) = 0,2$$
$$P(\mathbf{Z} = (3,4)) = 0,3 \qquad P(\mathbf{Z} = (5,2)) = 0,1 \qquad P(\mathbf{Z} = (5,4)) = 0,15$$

1) Donner les lois de X et Y.
2) Calculer $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$ et $V(Y)$.
3) Calculer $P(X \leq 3, Y = 4)$.
4) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5) Donner la loi de la variable aléatoire $V = X - Y$, calculer son espérance et sa variance.
6) Calculer la covariance de X et Y.

Ex 4. (mai 2007)

Est-il vrai que pour toute variable aléatoire X qui ne s'annule jamais, $\mathbb{E}(\frac{1}{X}) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$? (Justifiez brièvement votre réponse en choisissant judicieusement une variable aléatoire qui prend un nombre fini de valeurs).

Ex 5. Une urne contient $2n$ jetons numérotés de 1 à n, chaque numéro étant présent deux fois. On tire m jetons sans remise. Soit S la variable aléatoire égale au nombre de paires restant dans l'urne. Calculer l'espérance de S. Ce modèle fut utilisé par Bernoulli au 18ème siècle pour étudier le nombre de couples survivants dans une population de n couples après m décès.
Indications : Pour $1 \leq i \leq n$, on considèrera la variable aléatoire X_i définie par :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{-ème paire reste dans l'urne,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $P(X_i = 1)$ et $\mathbb{E}\, X_i$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}\, S$.

Ex 6. Covariance et piles ou faces (juin2003)

On lance 3 fois une pièce équilibrée.
On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si le premier lancer donne pile et qui vaut 0 sinon. Et on note Y la variable aléatoire égale au nombre total de fois où on obtient pile.

1) Donner les lois de X et de Y, leurs espérances et leurs variances.
2) Présenter sous forme de tableau la loi du couple (X, Y) et en déduire sa covariance.
3) Calculer la variance de la variable aléatoire $X + Y$ et celle de $3X - Y$.

Ex 7. Les deux trains.

Après un match important, 1400 supporters se rendent à la gare où deux trains spéciaux les attendent. Chaque supporter, indépendamment, choisit au hasard un des trains, y monte, et n'a plus le temps d'en changer avant le départ.

Si chaque train contient exactement 700 places assises, il est probable que des supporters voyageront debout, aussi a-t-on décidé que chacun des deux trains contiendrait $700+n$ places assises. On veut déterminer le nombre n de places supplémentaires à prévoir.

1) On note X le nombre de personnes qui montent dans le train stationné à gauche du quai, et Y le nombre de personnes qui montent dans l'autre. Donner les lois de X et Y, leurs espérances et leurs variances. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
2) Chaque train contient $700 + n$ places assises. En utilisant la variable X, exprimer l'évènement

$$E = \{\text{au moins un des 1400 supporters est obligé de voyager debout}\}$$

   Majorer la probabilité de E en utilisant l'inégalité de Tchebychev.
3) En déduire une valeur de n suffisante pour avoir au moins 95% de chances que tous puissent s'asseoir. On choisira n le plus petit possible, car il n'est pas rentable de faire voyager un grand nombre de places vides.

Ex 8. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui vérifient, pour un $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad \forall j \in \mathbb{N} \qquad P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \frac{a^i}{j!}$$

1) Calculer a.
2) Déterminer la loi de X et celle de Y, et donner les noms de ces lois. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3) On note $S = X + Y$. Donner *sans calcul* l'espérance et la variance de S.

Ex 9. *Covariances d'une loi multinomiale*

On considère une suite de n épreuves répétées indépendantes, chaque épreuve ayant k résultats possibles $r_1, \dots, r_k$. On note p_i la probabilité de réalisation du résultat r_i lors d'une épreuve donnée. Par exemple si on lance n fois un dé, $k = 6$ et $p_i = 1/6$ pour $1 \leq i \leq 6$. Si on lance n fois une paire de dés et que l'on s'intéresse à la somme des points, $k = 11$ et les p_i sont donnés par le tableau des $P(S = i + 1)$: $p_1 = 1/36$, $p_2 = 2/36, \dots$

Pour $1 \leq i \leq k$, notons X_i le nombre de réalisations du résultat r_i au cours des n épreuves.

1) Expliquer sans calcul pourquoi $\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_k) = 0$.

2) Quelle est la loi de X_i ? Que vaut sa variance ?

3) Pour $i \neq j$, donner la loi et la variance de $X_i + X_j$.

4) En déduire $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

5) Contrôler ce résultat en développant $\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_k)$ et en utilisant la première question.

Ex 10. Brioches aux raisins

Un boulanger mélange 1000 raisins dans de la pâte pour fabriquer 100 brioches de même masse.

1) Quelle est la loi exacte du nombre X de raisins contenus dans une brioche achetée chez ce boulanger ? Précisez quelles hypothèses vous faites. Donnez sans calcul l'espérance et la variance de X.

2) En utilisant une *approximation* classique de la loi de X, évaluer la probabilité que la brioche achetée contienne 10 raisins à deux unités près (i.e. $8 \leq X \leq 12$).

3) En utilisant l'inégalité de Tchebycheff, *majorer* la probabilité que la brioche achetée ne contienne pas plus de 3 ou au moins 17 raisins.

Ex 11.

Pour une certaine expérience aléatoire, l'ensemble des résultats possibles est

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, \dots\} = \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

et l'ensemble des événements observables est $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

1) A quelles conditions sur la famille de réels $(p_i)_{i \geq 2}$ définit-on une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ en posant $P(\{i\}) = p_i$ pour chaque i de Ω ?

Vérifier que ces conditions sont réalisées pour les $p_i = (i-1)\dfrac{2^{i-2}}{3^i} \quad (i \geq 2)$

(On pourra utiliser directement une formule du cours, à condition de préciser laquelle).

2) On tire un nombre N au hasard en utilisant cette expérience. On a alors pour chaque $i \geq 2$

$$P(N = i) = (i-1)\frac{2^{i-2}}{3^i}$$

Une fois que N est déterminé, on choisit au hasard (avec équiprobabilité) un entier X tel que $0 < X < N$.

Déterminer la valeur de $P(X = k | N = i)$ pour chaque $k \geq 1$ et chaque $i \geq 2$.

3) En déduire $P(X = k)$. Quelle est la loi de X ?

4) Calculer les $P(N - X = j | N = i)$ et trouver sans calcul la loi de la variable aléatoire $N - X$.

5) Les variables X et $N - X$ sont-elles indépendantes ?

Ex 12. On suppose que le couple de variables aléatoires discrètes (X, Y) a une loi donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X = i, Y = j) = \frac{\alpha}{(1+i+j)!},$$

où α est une constante strictement positive qui sera précisée ultérieurement.

1) Expliquer sans calcul pourquoi les marginales X et Y ont même loi.

2) On pose $S = X + Y$. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(S = k) = \frac{\alpha}{k!}.$$

3) En déduire la valeur de α et reconnaître la loi de S.

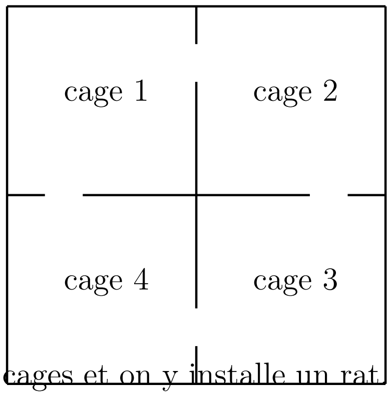
4) Calculer $P(X = 0)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

5) Donner sans calcul l'espérance de S et en déduire la valeur de $\mathbb{E}\,X$. La même méthode peut-elle servir pour obtenir $\mathrm{Var} X$?

6) Calculer $P(X = Y)$ et en déduire sans calcul $P(X > Y)$.

Ex 13. Cage à rat et somme de lois (mai 2009)

On dispose de quatre cages, numérotées de 1 à 4, qui communiquent entre elles selon le plan suivant :



On choisit au hasard l'une des cages et on y installe un rat. Il visite cette cage pendant un certain temps, puis choisit au hasard une des deux portes, et va dans une cage voisine. On note X le numéro de la première cage visitée (celle où on l'a posé) et Y le numéro de la cage où il va ensuite.

1) Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

2) Donner sous forme de tableau la loi du vecteur (X, Y).

3) Quelle est la loi de Y ? Donner son espérance et sa variance.

4) Calculer la covariance du couple (X, Y).

5) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

6) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $X + Y$.

7) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $2X$.

8) Donner, sous forme de tableau, la loi de $2X$.

9) Donner, sous forme de tableau, la loi de $X + Y$.

10) Un inventeur farfelu décide d'inventer une nouvelle notion mathématique, la "somme de lois". Il explique : "C'est tout simple : pour calculer la somme de la loi Truc et de la loi Machin, je prend une variable aléatoire de loi Truc, une variable aléatoire de loi Machin, et je calcule la loi de la somme des deux variables". C'est tout simple, mais ça ne marche pas. Expliquer pourquoi.