Université Lille 1 **U.F.R. de Mathématiques** **M.Fradon**

MASS L2 S4 **Probabilités Discrètes** **2017-2017**

Fiche 3

Ex 1. On jette deux dés équilibrés et on considère la variable aléatoire X égale au plus petit des points obtenus. Quelles valeurs peut prendre X ? Quelle est la loi de X ?

Ex 2. Les cravates

Dans cet exercice, on précisera pour chaque loi :

— son nom si elle en a un,

— les valeurs que peut prendre la variable aléatoire correspondante,

— et la probabilité de chacune de ces valeurs.

1) Monsieur Zzzz possède 50 cravates, dont une seule est à rayures. Tous les matins, il prend une cravate au hasard dans l'armoire, et tous les soirs il remet la cravate du jour à sa place.
On observe Monsieur Zzzz pendant 20 jours et on appelle X le nombre de fois où il porte une cravate à rayures. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
Application numérique : Calculer $P(X = 1)$.

2) Monsieur Zzzz part en voyage. Il met dans sa valise 20 cravates prises au hasard dans l'armoire.
Quelle est la loi du nombre V de cravates à rayures contenues dans la valise ?
Application numérique : Calculer $P(V = 1)$.

3) Monsieur Zzzz possède aussi 10 chemises dont 3 sont bleues. Il prend 5 chemises au hasard et les met dans sa valise.
Quelle est la loi du nombre Y de chemises bleues contenues dans la valise ?
Application numérique : Calculer $P(Y = 1)$.

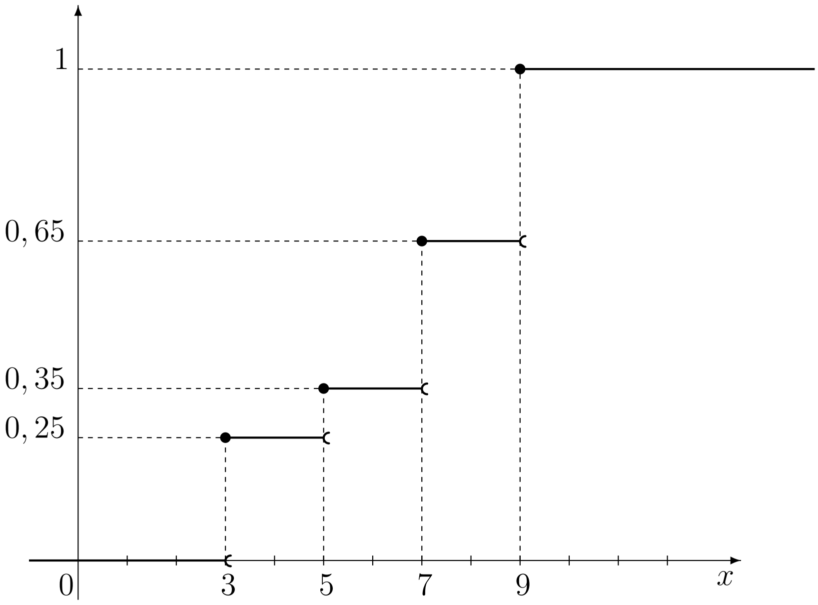
Ex 3. Deux personnes A et B lancent chacune un dé et répètent cette expérience. Soient X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de lancers du joueur A(resp. B) pour qu'il obtienne pour la première fois un 6.

1) Donner les lois de X et de Y.

2) Calculer la probabilité des événements $\{X = Y\}$, $\{X > Y\}$.

Ex 4. Lire une fonction de répartition (avril 2004).

Voici le graphe de la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X donnée.
En déduire la loi de X, qu'on présentera sous forme de tableau.



Ex 5. Un garage peut réparer huit voitures par jour. Chaque jour, huit conducteurs indépendants ont rendez-vous, chacun ayant une probabilité de 90% de venir effectivement.

1) Quelle est la loi du nombre X de voitures présentes au garage un jour donné ? En déduire la probabilité que le garage ne soit pas plein (moins de huit voitures à réparer).

2) Un véhicule qui entre a 70% de chances d'être réparé (tous ne sont pas réparables). On note Y le nombre de voitures réparées un jour donné. Calculer $P(Y = k|X = n)$ (distinguer le cas $0 \leq k \leq n$ du cas $k > n$). En déduire que la loi de Y est une binômiale dont on précisera les paramètres.

3) Pour i de 1 à 8, on définit la variable Z_i par :
$Z_i = 0$ si la i^{e} voiture ne vient pas ou n'est pas réparable.
$Z_i = 1$ si la i^{e} voiture se présente et est réparée.

En exprimant Y en fonction des Z_i, retrouver la loi de Y.

Ex 6. Une loi du minimum

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes. X suit la loi géométrique de paramètre α, et Y suit la loi géométrique de paramètre β, avec α et β deux réels fixés de $]0, 1]$.
On note Z la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega \qquad Z(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega)).$$

1) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > k)$.

2) Exprimer l'événement $\{Z = k\}$ à partir des événements $\{X = k\}$, $\{Y = k\}$, $\{X > k\}$ et $\{Y > k\}$.

3) En déduire la loi de Z. Comment s'appelle-t-elle ?

Ex 7. Au bâtiment M1 se trouvent deux distributeurs de boissons qui tombent en panne indépendamment l'un de l'autre : le nombre de pannes par mois suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$ pour le premier et une loi de Poisson $\mathcal{P}(\beta)$ pour le second, α et β étant des réels positifs.

1) Trouver la loi du nombre total de pannes par mois.

2) Sachant qu'il y a eu n pannes ce mois-ci, quelle est la probabilité pour que le premier soit responsable de r d'entre elles.

Ex 8. Soit λ un réel positif et soit $p \in [0,1]$. Dans une banque, le nombre de chèques émis par les clients en un jour est une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Pour chaque chèque émis, la probabilité que ce chèque soit sans provision est p. On appelle Y le nombre de chèques émis sans provision lors d'une journée.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver $P(Y = k \mid X = n)$ suivant les valeurs de k.

2) Déterminer la loi de Y et celle de $X - Y$.

3) Les variables $X - Y$ et Y sont-elles indépendantes ?

Ex 9. Fusée

Une fusée est composée de 200 000 pièces, dont chacune n'a qu'une chance sur un million d'être défectueuse. Si deux pièces au moins sont défectueuses, le lancement de la fusée échoue à coup sûr, si une seule est défectueuse, il a une chance sur deux d'échouer.

1) En précisant les hypothèses, donner la loi du nombre X de pièces défectueuses.

2) Exprimer la probabilité $P(E)$ que le lancement échoue, en fonction de $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.

3) Evaluer $P(E)$ grâce à une approximation de la loi de X. Que penser de ce projet ?

Ex 10. Galettes des rois

1) Au Resto U, c'est le jour des galettes des rois. Des centaines de galettes ont été coupées en huit et les parts, mélangées, sont alignées sur le presentoir des desserts. Chaque étudiant choisit une part au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait la fève ?
Sur un groupe de TD de 24 étudiants, on note X_i, pour i de 1 à 24, la variable aléatoire égale à 1 si le $i^{\text{ème}}$ étudiant trouve une fève et à 0 s'il n'en trouve pas. Donner la loi de chacun des X_i.
Exprimer à partir des X_i le nombre Y d'étudiants qui ont la fève. Quelle est la loi de Y ? (Donner la loi exacte, qui dépend du nombre N de galettes mises en présentoir, puis donner une loi approchée qui tient compte du fait que N est trés grand)

2) Nos 24 étudiants, pas vraiment rassasiés par le contenu de leur plateau, se sont cotisés pour acheter trois galettes. Ils coupent chacune en huit parts. Chaque étudiant choisit une part au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait la fève cette fois-ci ?
On note maintenant V_i, pour i de 1 à 24, la variable aléatoire égale à 1 si le $i^{\text{ème}}$ étudiant trouve une fève et à 0 s'il n'en trouve pas. Donner la loi de chacun des V_i.
Exprimer à partir des V_i le nombre W d'étudiants qui ont la fève cette fois-ci. Quelle est la loi de W ?

3) Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre p. Quelle est la loi de $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$?

Ex 11. *Assurances maritimes et concentration du capital*

Une compagnie d'assurances assure une flotte de 500 navires de pêche valant chacun un million d'euros. Le risque assuré est la perte totale du navire qui est un événement de probabilité 0.001 pour une année. Les naufrages des différents navires sont considérés comme indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de navires perdus en une année.

1) Trouver la loi exacte de X.

2) Evaluer $P(X = 10)$ en utilisant une approximation de la loi de X.

3) La compagnie rembourse le 31 décembre, sur ses réserves, la valeur des bateaux assurés ayant fait naufrage dans l'année. A combien doivent s'élever ces réserves financières pour qu'elle puisse effectuer la totalité de ces remboursements avec une probabilité supérieure à 0.999 ? *Indication :* En utilisant l'approximation poissonnienne de la loi binomiale, montrer qu'il suffit que ces réserves représentent la valeur d'un très petit nombre de navires.

4) La compagnie fusionne avec une autre compagnie identique (500 navires assurés). Reprendre brièvement la question 3) et commenter le résultat obtenu.

Ex 12. Les variables aléatoires X et Y sont telles que :

$$\begin{array}{ccc} & P(X=0 \text{ et } Y=1)=1/5 & P(X=0 \text{ et } Y=2)=1/5 \\ P(X=1 \text{ et } Y=0)=1/5 & P(X=1 \text{ et } Y=1)=1/5 & P(X=1 \text{ et } Y=2)=1/5 \end{array}$$

1) Trouver la loi et la fonction de répartition de X.

2) Trouver la loi et la fonction de répartition de Y.

3) Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

Ex 13. (juin 2008)

Les v.a. X et Y sont telles que

$$P(X=-1,\ Y=0) = P(X=0,\ Y=1) = P(X=1,\ Y=0) = 1/6 \qquad P(X=0,\ Y=0) = 1/2$$

1) Trouver la loi et la fonction de répartition de X.

2) Trouver la loi et la fonction de répartition de $Z = X - Y$.

Ex 14. Groupes sanguins et rhésus (inspiré du partiel d'avril 2010)

Pour les besoins médicaux (en particulier les transfusions), on classe le sang humain en quatre groupes : groupe O, groupe A, groupe B et groupe AB. Mais le sang présente aussi un "facteur rhésus", qui peut être positif ou négatif. Il y a donc huit [1] catégories de sang (O positif, O négatif, A positif, A négatif, etc).

En France, une personne choisie au hasard a 43% de chances d'être du groupe O, 45% de chances d'être du groupe A, 9% de chances d'être du groupe B, et 3% de chances d'être du groupe AB. Parmi les personnes du groupe O, 14% sont de rhésus négatif. La proportion de rhésus négatif est de 13% parmi les personnes du groupe A. Elle est de 22% parmi les gens de groupe sanguin B, et de 33% parmi les personnes du groupe AB.

1) Quelle est la probabilité qu'une personne prise au hasard soit de rhésus positif ?

2) Si l'on sait qu'une personne est de rhésus négatif, quelle est la probabilité qu'elle soit du groupe AB ?

3) Dans un groupe de TD de 24 étudiants, on note N_O, N_A, N_B et N_{AB} les nombres respectifs d'étudiants ayant le groupe sanguin O, A, B et AB. Quelle est la loi du vecteur aléatoire (N_O, N_A, N_B, N_{AB}) ? Indiquer aussi les quatre lois des variables aléatoires N_O, N_A, N_B et N_{AB}.

4) Quelle est la loi du couple aléatoire $(N_O + N_A, N_B + N_{AB})$?

1. Il y a en réalité beaucoup plus de catégories, basées sur une trentaine de caractéristiques du sang. Mais les deux caractéristiques ci-dessus (ABO et rhésus) sont les plus importantes pour assurer la compatibilité des transfusions. Et ces deux caractéristiques ne déterminent que huit catégories.