Université Lille 1	**Département de Mathématiques**	**M.Fradon**
MASS L2 S4	**Calcul Différentiel**	**2017-2018**

Fiche 3

Ex 1. 1) Par quelles applications affines sur $\mathbb{R}^2$ peut-on approximer au mieux la fonction $f(x,y) = y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$ autour des points $(0,1)$, $(\pi, 2)$ et $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})$

2) On veut davantage de précision dans l'approximation au voisinage de $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})$. Donner une approximation par un polynôme de degré 2.

3) Les plans tangents à la surface d'équation $z = y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)$ aux points $(0,1,0)$ et $(\pi, 2, 4)$ sont-ils parallèles ?

Ex 2. Examen juin 2012

1) La fonction ϕ de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ vers $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est définie par

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \phi(x,y) = \left(xy \ , \ \frac{y}{x}\right)$$

est-elle un difféomorphisme ?

2) Calculer l'intégrale de la fonction $(x,y) \longmapsto \frac{y}{x}$ sur le domaine

$$K = \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \ , \ x \leq y \leq 4x \text{ et } 1 \leq xy \leq 2\right\}$$

Ex 3. Un difféomorphisme à connaitre

1) Les relations $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ définissent un difféomorphisme entre une partie de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ qu'on précisera et une partie de $\mathbb{R}^2$ qu'on précisera également (il y a plusieurs choix possibles). Quelle est sa matrice jacobienne ?

2) En utilisant ce difféomorphisme comme changement de variables, calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \ dx \ dy$$

En déduire le fait très important que $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \ e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une densité de probablité sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que la loi $\mathcal{N}(0,1)$ existe !

3) Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent toutes deux la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On veut connaitre la loi du rapport Y/X. La fonction de répartition de Y/X a une valeur donnée, pour chaque t de $\mathbb{R}$, par une intégrale double. Ecrire cette intégrale en tenant compte du fait que X peut être strictement positif ou strictement négatif (quelle est la probabilité qu'il soit nul ?).

4) Déterminer l'image du domaine d'intégration par le difféomorphisme ci-dessus, calculer l'intégrale et en déduire la fonction de répartition de Y/X.

Ex 4. Tour de refroidissement

Une tour de refroidissement a la forme d'un hyperboloïde d'équation $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{100}-\frac{z^2}{576}=1$ où z varie de -30 (niveau du sol) à 15 (sommet de la tour). Toutes les dimensions sont en mètres.

1) Quel est le rayon de la tour au niveau du sol, au sommet, et à l'endroit où elle est la plus étroite (à quelle hauteur est-ce ?).

2) On peut représenter cette surface comme l'union des graphes de deux fonctions sur $\mathbb{R}^2$. Lesquelles ?

3) Déterminer le plan tangent à la surface au point $(8;8;4,8\sqrt{7}) \simeq (8;8;12,7)$.

4) Trouver un autre point en lequel le plan tangent à la surface est parallèle au plan tangent au point $(8;8;12,7)$.

5) Donner un vecteur orthogonal au plan tangent, en ces deux points, puis en tout point de la surface.

6) On peut aussi voir la surface de la tour comme une "ligne de niveau" d'une fonction sur $\mathbb{R}^3$. Laquelle ?

7) Calculer le gradient de cette fonction de trois variables. Que représente ce gradient vis-à-vis de la tour ? Quel lien a-t-il avec le vecteur orthogonal au plan tangent en tout point de la surface qu'on a trouvé à la question

8) Quel est le volume à l'intérieur de la tour ?

Ex 5. Terrier de marmotte : le téléphérique et la profondeur du lac

Une marmotte habite un terrier. Autour, l'altitude en mètres de la montagne est

$$h(x,y)=2000+100\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}x+\frac{\pi}{2}y+\sin(\pi x)+\sin(\pi y)\right)$$

où x est la distance en km vers l'est et y celle vers le nord, à partir du terrier. Cette fonction d'altitude est valable pour $(x,y)\in]-1,5\ ;\ 1[^2$.

1) Calculer la dérivée seconde de la fonction d'altitude en les points où le gradient est nul. Parmi ces points, déterminer les maxima locaux, les minima locaux, et les points col.

2) Au sud-ouest du terrier se trouve un lac. Où est le fond de ce lac ?

3) Calculer les coordonées du sommet qui se trouve derrière le terrier, au nord-est. Quelle est son altitude ?

4) Un autre sommet se trouve approximativement au nord-ouest du terrier. De quelle longueur de cable a-t-on besoin pour construire un téléphérique entre les deux ?

5) Le lac est alimenté par plusieurs sources, et un torrent s'écoule vers la vallée. D'où part ce torrent et quelle est la profondeur du lac ?

Ex 6. CROSS

Une route maritime passe à proximité d'un cap. La route est représentée dans $\mathbb{R}^2$ par la droite d'équation $y=2-x$ et la terre ferme par la partie $\mathcal{T}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ y\leq -x^2-3x-3\}$, avec x et y en kilomètres selon des axes vers l'est et le second vers le nord). Pour joindre par radio les navires, on veut implanter une antenne sur la côte, le plus près possible de la route sur laquelle ils circulent. Vous êtes chargé de déterminer l'emplacement de l'antenne, sa puissance, et le point où les navires devront se mettre en communication avec la terre.

1) Dessiner la route et le cap.

2) On se donne des notations pour pouvoir calculer : $f(x_1) = 2 - x_1$ et $g(x_2) = -x_2^2 - 3x_2 - 3$ pour tout x_1 et x_2 de $\mathbb{R}$. La distance entre le point $(x_1, f(x_1))$ de la route et le point $(x_2, g(x_2))$ de la côte est notée $\delta(x_1, x_2)$. La calculer.

3) Pour déterminer en quel couple (x_1, x_2) cette distance est minimale, on va s'économiser en exploitant la monotonie de $x \longmapsto x^2$. Justifier qu'il est équivalent de minimiser $\delta(x_1, x_2)$ ou $\delta^2(x_1, x_2)$.

4) Calculer le gradient de δ^2 et ses dérivées secondes. Déterminer où le gradient est nul et que vaut la dérivée seconde là où il est nul.

5) Où doit-on positionner l'antenne ? Quel est le point où les navires devront se mettre en communication avec la terre (le point où les navires en sont le plus proches) ? La puissance de l'antenne est déterminée par la distance à laquelle passent les navires. Combien vaut cette distance minimale ?

Ex 7. Régression linéaire (méthode des moindres carrés)

On a n données statistiques (x_1, y_1),..., (x_n, y_n) obtenues après n tirages aléatoires. Les x_i ont été choisis par l'expérimentateur ou tirés au hasard, les y_i ont été mesurés pour chaque x_i, et on pense qu'il existe une relation affine entre les y_i et les x_i : on aurait $y_i = ax_i + b + \varepsilon_i$ où a et b sont des paramètres inconnus et où les ε_i modélisent l'erreur aléatoire sur les quantités mesurées. On cherche une valeur approximative de a et b.

On considère, en fonction de a et b, la somme des carrés des erreurs aléatoires :

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

A quelle(s) condition(s) la fonction S a-t-elle un unique minimum ? Déterminer en quel point $(\hat{a}, \hat{b})$ ce minimum est atteint. Que représentent $\hat{a}$ et $\hat{b}$ vis-à-vis des données statistiques et en quoi la condition trouvée est-elle naturelle ?

Remarque : S est une fonction de deux variables à $2n$ paramètres. Pour éviter de se noyer dans des calculs, il est vivement conseillé de noter $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les moyennes arithmétiques des x_i et des y_i respectivement. On pourra introduire d'autres notations.

Ex 8. Maximum de vraisemblance pour les gaussiennes

On rappelle que la densité de la loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

1) Quand les paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ sont fixés, en quel x ceci est-il maximal ? Si on ne connait pas les paramètres mais seulement le résultat d'un tirage x_1, quelle information peut-on en tirer sur les paramètres ?

2) On réalise n tirages d'une gausienne dont on ne connait pas les paramètres. On note les résultats observés x_1, x_2,...,x_n. On veut estimer les paramètres inconnus. Pour cela, on cherche pour quel m et quel σ la probabilité de tirer un résultat proche de celui observé est la plus grande :

$$L(m, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} f_{m,\sigma}(x_i)$$

Il n'est pas pratique de calculer le gradient de cette fonction (pourquoi ?). Cette fonction est maximale en les points où son logarithme est maximal (justifier). Calculer le gradient et la dérivée seconde du logarithme de L, et déterminer où le gradient s'annule. Déterminer en quels paramètres (m, σ) le logarithme de L, et donc aussi L, est maximal.

Ex 9. Point critique (Examen, mai 2016)

On considère la fonction $f(x, y) = e^{y^2}\left(x^4 + y^2\right)$.

1) Calculer les dérivées premières et secondes de f.
2) Déterminer l'ensemble des points critiques de f.
3) Est-ce qu'on peut déterminer la nature du point critique $P = (0, 0)$?
4) Démontrer que P est un minimum global de f.

Ex 10. Ondulation exponentiellement décroissante (étude complète)

Donner le gradient et la matrice hessienne de la fonction d'expression

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2 + y^2)$$

Calculer la matrice hessienne en les points où le gradient est nul. Préciser chaque fois s'il s'agit d'un maximum (local ou global), d'un minimum (local ou global), ou d'un point col.

On justifiera avec soin la nature des points critiques, notamment ceux en lesquels la hessienne est semi-définie positive ou négative.

Ex 11. 1) Donner le domaine de définition de la fonction d'expression $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2) Calculer son gradient, en précisant sur quel domaine elle est différentiable.

3) Calculer la norme du gradient. Dessiner la fonction en trois dimenension. La représenter en deux dimensions par son gradient et ses lignes de niveau.

4) Calculer sa matrice hessienne et ses points critiques. Déterminer les maxima, minima, et points cols de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5) Montrer que $f \Delta f$ est constante (combien vaut-elle ?).

Ex 12. $\mathbf{f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)}$ (étude complète)

1) Rappeler le domaine de définition de la fonction d'expression $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ et ses lignes de niveau.

2) Calculer son gradient. Donner la norme du gradient et sa direction. Le représenter graphiquement.

3) Déterminer les points critiques et faire le lien avec la représentation graphique de la fonction.

4) Calculer sa matrice hessienne. De quel type est-elle là où le gradient s'annule ? La fonction a-t-elle des minima et des maxima, locaux ou globaux ? A-t-elle des points cols ?