Université Lille 1 **U.F.R. de Mathématiques** **M.Fradon**

MASS L2 S4 **Probabilités Discrètes** **2016-2017**

Fiche 2

Ex 1. Dans un élevage de moutons, on décèle 15% d'animaux malades. La probabilité qu'un mouton qui n'est pas malade ait une réaction négative à un test donné est 0.90. Par contre, s'il est malade, la réaction sera positive avec une probabilité 0.80. Quelle est la probabilité qu'un mouton choisi au hasard et ayant une réaction positive au test soit malade ?

Ex 2. Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1, R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens et les mauvais risques. Les effectifs des ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R_1, 50% pour R_2 et 30% pour R_3. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

1) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?

2) Si M. Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

Ex 3. On dispose de trois urnes U_1, U_2, U_3 contenant chacune des boules bleues et des boules jaunes. La composition respective des urnes est 6 bleues 3 jaunes pour U_1, 7 bleues 4 jaunes pour U_2 et 3 bleues 3 jaunes pour U_3. On prélève au hasard une boule dans U_1 et une boule dans U_2. On les place dans U_3 et on tire une boule dans U_3. Quelle est la probabilité qu'elle soit bleue ?

Ex 4. *Alcootest*

On s'intéresse à la fiabilité d'un alcootest pour automobilistes. Grâce à des études statistiques sur un grand nombre d'automobilistes, on sait que $0,5\%$ d'entre eux dépassent la dose d'alcool autorisée.

Aucun test n'est fiable à 100%. Avec celui que l'on considère, la probabilité que le test soit positif quand la dose d'alcool autorisée est dépassée, et la probabilité que le test soit négatif quand elle ne l'est pas, valent toutes deux $\rho = 0,95$.

Quelle est la probabilité qu'un automobiliste ayant un test positif ait réellement dépassé la dose d'alcool autorisée ?

Quelle devrait être la valeur de ρ pour que cette probabilité soit de 95% ?

Un policier affirme : *Ce test est beaucoup plus fiable le samedi soir à la sortie des boites de nuit !* Sachant que la proportion d'automobilistes ayant trop bu est alors de 30%, déterminer s'il a raison.

Ex 5. A partir de l'interro de mars 2012...

1) A_1, A_2, A_3... est une partition de Ω telle que $P(A_i) = \frac{1}{2^i}$ pour chaque i de $\mathbb{N}^*$. Ecrire la formule de conditionnement par tous les cas possibles pour cette partition. L'événement B est tel que $P(B|A_i) = \frac{1}{5^i}$ pour chaque i. Calculer la probabilité de B.

2) On a deux dés ordinaires (à 6 faces, équilibrés) : un dé rouge et un dé vert. On les lance ensemble, plusieurs fois si nécessaire, jusqu'à la première fois où le dé rouge donne un six. On arrête alors les lancers. Quelle est la probabilité qu'au cours de cette expérience le dé vert n'affiche jamais de six ?

Ex 6. Les menteurs
On considère n personnes. Chacune a probabilité p de mentir. On donne à la première personne une information sous la forme "*oui* ou *non*". La première personne transmet l'information à la seconde, qui la transmet à la troisième, etc, jusqu'à la n-ième qui l'annonce au monde.

1) Pour $1 \leq k \leq n$, on note V_k l'évènement "l'information que reçoit la k-ième personne est vraie", et on pose $p_k = P(V_k)$. Calculer p_1, p_2, et montrer que pour $k \geq 1$

$$p_{k+1} = p + p_k(1 - 2p).$$

2) Calculer la probabilité pour que l'information annoncée au monde soit vraie. (Indication : trouver une constante C telle que les $u_k = p_k - C$ forment une suite géométrique).

3) Quelle est la limite de cette probabilité lorsque le nombre n de personnes tend vers l'infini ? (Étudier en fonction de p)

Ex 7.
On appelle Ω l'ensemble des nombres complexes dont le module appartient à $\{0, 1, \ldots, 21\}$ et dont l'argument est 0, $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$. On tire au hasard un élément dans Ω (i.e. on munit Ω de l'équiprobabilité). Quelle est la probabilité des événements :

$$\begin{aligned} A &= \{z \in \Omega, \quad |z| \leq 15 \text{ et } \arg z = 0\} \\ B &= \{z \in \Omega, \quad |z| \leq 15 \text{ et } \arg z = \tfrac{\pi}{3}\} \\ C &= \{z \in \Omega, \quad |z| \leq 15 \text{ et } \arg z = -\tfrac{\pi}{3}\} \end{aligned}$$

Calculer $P(A \cap B \cap C)$. A, B et C sont-ils indépendants ?

Ex 8. On lance n fois un dé régulier. Décrire l'ensemble Ω des résultats possibles. Quel est son cardinal ? Calculer la probabilité p_n de l'événement : « On obtient au moins une fois six». Comment choisir n pour que p_n soit supérieur ou égal à $0,95$?

Ex 9. On effectue des lancers répétés d'une paire de dés et on observe pour chaque lancer la *somme* des points indiqués par les deux dés. On se propose de calculer de deux façons la probabilité de l'événement E défini ainsi : *dans la suite des résultats observés, la première obtention d'un* 9 *a lieu avant la première obtention d'un* 7.

1) Quelle est la probabilité de n'obtenir ni 7 ni 9 au cours d'un lancer ?

2) *Première méthode :* On note $F_i = \{$*obtention d'un* 9 *au i-ème lancer*$\}$ et pour $n > 1$, $E_n = \{$ *ni* 7 *ni* 9 *ne sont obtenus au cours des* $n-1$ *premiers lancers et le n-ième lancer donne* 9$\}$. Dans le cas particulier $n = 1$, on pose $E_1 = F_1$.

a) Exprimer E à l'aide d'opérations ensemblistes sur les E_n ($n \geq 1$). Exprimer de même chaque E_n à l'aide des F_i et des $H_i = \{$ *ni* 7 *ni* 9 *au i-ème lancer*$\}$.
b) Calculer $P(E_n)$ en utilisant l'indépendance des lancers.
c) Calculer $P(E)$.

3) *Deuxième méthode :* On note $G_1 = \{$ *obtention d'un* 7 *au premier lancer*$\}$.

a) Donner une expression de $P(E)$ en utilisant le conditionnement par la partition $\{F_1, G_1, H_1\}$.

b) Donner sans calcul les valeurs de $P(E \mid F_1)$, $P(E \mid G_1)$ et expliquer pourquoi $P(E \mid H_1) = P(E)$.

c) En déduire la valeur de $P(E)$.

Ex 10. Pour chacune des assertions suivantes donner soit une preuve, soit un contre-exemple.

1) si A et B sont deux événements indépendants et incompatibles alors l'un des deux événements au moins est de probabilité nulle.

2) si l'un des événements A ou B est de probabilité nulle alors A et B sont indépendants et incompatibles.

3) Si un événement A est indépendant d'un événement B, alors il est indépendant de l'événement complémentaire B^c.

4) Si un événement A est indépendant d'un événement B et d'un événement C, alors il est indépendant de $B \cup C$.

Ex 11. L'urne rouge et l'urne verte (janvier 97)

Deux urnes U et U' contiennent chacune des boules vertes et des rouges. Les proportions de boules vertes dans U et U' seront notées respectivement p et p' ($p, p' \in]0, 1[$). On effectue une suite de tirages *avec remise* d'une boule selon la procédure suivante. Pour initialiser la procédure, on commence par choisir au hasard suivant un certain procédé l'une des deux urnes. La probabilité de choix de U par ce procédé est notée α ($0 \leq \alpha \leq 1$). On tire une boule dans l'urne ainsi choisie. Si elle est verte, le tirage suivant aura lieu dans l'urne U. Si elle est rouge, il aura lieu dans l'urne U'...Et on continue indéfiniment en appliquant cette règle à chaque étape. Chaque boule tirée est remise dans l'urne d'où elle provient avant le tirage suivant. On note R_i l'événement "obtention d'une rouge au $i$ème tirage", V_i l'événement "obtention d'une verte au $i$ème tirage" et on pose $\pi_n = P(V_n)$.

1) Calculer π_1à l'aide de p, p' et α.

2) Que valent $P(V_n|R_{n-1})$ et $P(V_n|V_{n-1})$?

3) Etablir une relation de récurrence entre π_n et π_{n-1}.

4) En déduire une formule explicite donnant π_n en fonction de p, p', α et n.
Indication : On pourra chercher une constante c telle que $u_n = \pi_n - c$ soit le terme général d'une suite géométrique.
Quelle est la limite de π_n quand n tend vers l'infini ?

5) Utiliser ce qui précède pour déterminer *sans calcul* les probabilités conditionnelles $P(V_{n+k}|V_n)$ et $P(V_{n+k}|R_n)$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

6) Les événements V_{n+k} et V_n sont-ils indépendants ?

Les exercices suivants proviennent d'anciennes interros. Vérifiez que vous savez les faire *seul* et *sans documents*

Ex 12. Des étudiants se préparent à un examen. Le sujet sera fabriqué par l'un de leurs trois professeurs : Xxxx, Yyyy ou Zzzz.
Or, les étudiants redoutent qu'un certain chapitre soit posé à l'examen et ils évaluent à 10% la probabilité pour que le chapitre en question sorte si c'est Xxxx qui fait le sujet, 40% si c'est Yyyy qui le fait, et 80% si c'est Zzzz (Inutile de dire à quel prof vont les sympathies des étudiants...).
Yyyy leur a dit : Il y a une chance sur deux pour que ce soit moi qui fasse le sujet, et si je ne le fais pas il y a trois chances sur cinq pour que ce soit Xxxx.
Le jour J arrive, et le chapitre fatidique est posé à l'examen ! Sachant cela, calculer les probabilités pour que l'examen ait été posé par Xxxx, Yyyy ou Zzzz.

Ex 13. Pile ou face triphasé (janvier 96)

Trois personnes nommées A, B, C lancent à tour de rôle la même pièce de monnaie (ABCABCABC...). La probabilité d'obtenir pile lors d'un lancer est p $(0 < p < 1)$. Le gagnant est le premier qui obtient pile (la partie *s'arrête* alors).

1) On note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement *A gagne la partie lors du n-ième lancer* (resp. B, C). Calculer $P(A_1)$, $P(B_2)$, $P(C_3)$. Les événements A_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

2) En discutant suivant les valeurs de n, calculer $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$.

3) Calculer la probabilité de gagner de chacun des trois joueurs.

4) Quelle est la probabilité qu'il y ait un vainqueur ? Conclure.

Ex 14. Le petit chaperon rouge (avril 2011)

Le petit chaperon rouge se promène dans la forêt. Chaque fois qu'il rencontre un loup, il a une chance sur cinq d'être mangé (les loups sont indépendants).

1) Quelle est la probabilité qu'après trois rencontres, le petit chaperon rouge ne soit toujours pas dévoré ?

2) Le petit chaperon rouge va rendre visite à sa grand-mère. Pour s'y rendre, il a le choix entre trois sentiers : le chemin de la fontaine, le chemin des jonquilles et le chemin des champignons. Il choisit au hasard (une chance sur trois de choisir chacun des chemins).

Le petit chaperon rouge ne le sait pas mais ce jour-là, il y a deux loups sur le chemin de la fontaine et un loup sur le chemin des jonquilles. Il n'y en a pas sur le chemin des champignons. Calculer la probabilité qu'il arrive sain et sauf chez sa grand-mère.

3) On ne sait pas quel chemin le petit chaperon rouge a choisi, mais on constate qu'il est arrivé sain et sauf. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le chemin des champignons ?

4) Cinq loups (toujours indépendants) rencontrent chacun un lapin dans la forêt. Chaque loup a une chance sur dix de manger sa proie (où l'on voit que les lapins courent plus vite que les petits chaperons rouges...). Donner le nom (complet !) de la loi du nombre L de lapins mangés. Quelle est la probabilité qu'exactement trois lapins soient mangés ? (donner l'expression de cette probabilité, et aussi sa valeur numérique).