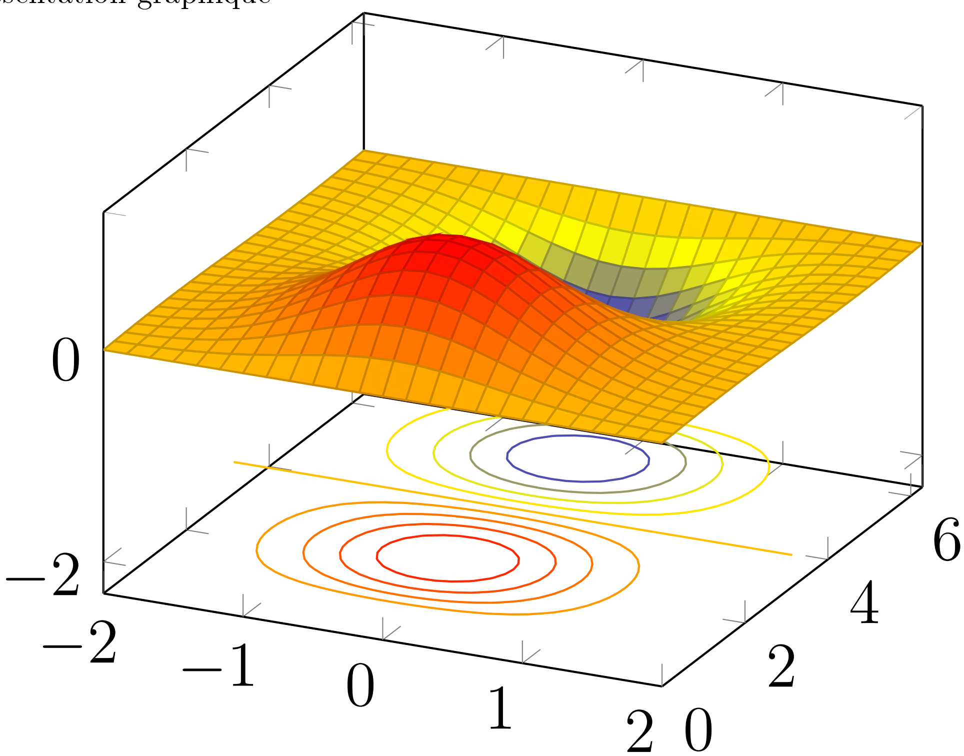
Université Lille 1 **Département de Mathématiques** **M.Fradon**
MASS L2 S4 **Calcul Différentiel** **2017-2018**

Fiche 2

Ex 1. La fonction définie sur $]-2;2[\times]0;2\pi[$ par $f(x,y) = \exp(-x^2)\sin(y)$ a pour représentation graphique



1) Visualiser sur ce dessin le gradient en chaque point et les extrema en précisant leur nature.

2) Calculer le gradient de f en chaque point, ses points critiques et sa matrice hessienne. Est-ce cohérent avec ce qu'on a visualisé ?

3) Calculer le laplacien de f.

Ex 2. Terrier de marmotte (pentes et pluie)

Une marmotte habite un terrier. Autour, l'altitude en mètres de la montagne est

$$h(x,y) = 2000 + 100\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}x + \frac{\pi}{2}y + \sin(\pi x) + \sin(\pi y)\right)$$

où x est la distance en km vers l'est et y celle vers le nord, à partir du terrier. Cette fonction d'altitude est valable pour $(x,y) \in]-1,5\ ;\ 1[^2$.

1) A quelle altitude habite la marmotte ?

2) Quand il pleut, dans quelle direction coule l'eau qui tombe 500m au nord du terrier. Même question pour l'eau qui tombe 1km au sud-est. En lequel de ces deux points la pente est-elle la plus forte ?

3) La marmotte a choisi l'emplacement de son terrier en fonction de la pente. En quoi cette pente est-elle remarquable ? Y a-t-il un autre point de même pente dans la zone cartographiée ?

Ex 3. On note γ la fonction de $]0;+\infty[\times]0;2\pi[$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (r,θ) associe $(r\cos\theta, r\sin\theta)$. On note f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x,y) associe (x^3+y^3, x^3-y^3).

1) Déterminer les matrices jacobiennes de ces deux fonctions.

2) Exprimer la composée $f\circ\gamma$ et calculer de deux façons différentes la jacobienne de la composée.

Ex 4. **(Examen, mai 2016)**

Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au voisinage de $(0,0)$ pour la fonction $f(x,y) = x^2y - xy + 3 + xy^3$.

Ex 5. **Approximation polynomiale de la fonction de Cobb–Douglas**

On rapelle la fonction de Cobb-Douglas utilisée pour modéliser la valeur produite v en fonction du capital investi c et du nombre d'heures de travail t :

$$v(c,t) = p\, c^\alpha t^\beta \quad \text{avec} \quad p>0, \quad 0<\alpha<1, \quad 0<\beta<1 \quad \text{fixées}$$

On considère à nouveau l'entreprise dont la production est modélisée par une fonction de Cobb-Douglas de $\alpha = 0,35$ et $\beta = 0,65$ et dont la production actuelle nécessite (par an) 800 000€ d'investissement et 120 000 heures de travail.
Au voisinage de ce point, par quel polynôme de degré 2 peut-on approximer la fonction v/p ? On considère que la fonction de Cobb–Douglas est bien approximée par un plan dans la partie de $\mathbb{R}^2$ éloignée des axes : est-ce abusif ?

Ex 6. 1) Approcher la fonction $(x,y)\longmapsto x^y$ par un polynôme de degré 2 au voisinage du point $(1,1)$. Quelle est la différentielle de cette fonction en $(1,1)$?

2) Même question au voisinage du point $(e,2)$.

Ex 7. **Dans le bol**

L'intérieur d'un bol est représenté par la fonction suivante sur $\mathbb{R}^2$: $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{4}\mathbf{1}_{x^2+y^2\leq 36}$

1) Tracer cette fonction de deux façons : dessin en 3D, et dessin en 2D avec les courbes de niveaux.

2) Préciser dans quelles unités sont x, y et $f((x,y)$. Quel est le diamètre du bol ? Quelle est sa profondeur ?

3) Calculer la contenance du bol.

4) Quand il contient un quart de litre de lait, quelle hauteur de bord reste-t-il au-dessus du liquide ?