Université Lille 1	**U.F.R. de Mathématiques**	**M.Fradon**
MASS L2 S4	**Probabilités Discrètes**	**2016-2017**

Fiche 1

Ex 1. Lors de la finale de natation du 100 mètres papillon, on attribue à chacun des 8 finalistes le numéro de sa ligne d'eau. Les lignes sont numérotées de 1 à 8.

1) Combien y -a-t-il d'arrivées possibles ?
2) Combien y a-t-il de classements où
   - 1 arrive avant 2 ?
   - 1, 2, 3 arrivent dans cet ordre et consécutifs ?
   - 1, 2, 3 arrivent dans cet ordre mais non nécessairement consécutifs ?
   - les nageurs des lignes d'eau ayant un numéro pair occupent un rang pair dans le classement.

Ex 2. 1) Ecrire sans $\sum$, et calculer si possible :

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n, \quad \sum_{p=1}^{n} p, \quad \sum_{p=1}^{n} n, \quad \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{p}.$$

2) Ecrire avec $\sum$:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

3) Les égalités suivantes sont-elles vraies :

$$\sum_{p=1}^{n}(p \times n) = \sum_{k=1}^{n}(k \times n) = n \times \sum_{k=1}^{n} k = k \times \sum_{k=1}^{n} n.$$

Ex 3. Deux nombres à virgule.

1) Mettre sous forme de fraction le nombre x dont l'écriture décimale illimitée est

$$x = 0.357357357357\ldots\ldots 357\ldots\ldots$$

(utiliser une série dont on calculera la somme).

2) Même question avec le nombre $0.4999\ldots 9\ldots$. S'agit-il d'un développement décimal illimité ?

Ex 4. Trois boules sont tirées successivement d'une urne contenant des boules blanches et des boules rouges. On définit les événements :

$$\begin{aligned} A &= \{\text{la première boule est blanche}\},\\ B &= \{\text{la deuxième boule est blanche}\},\\ C &= \{\text{la troisième boule est blanche}\}. \end{aligned}$$

Exprimer à l'aide des événements A, B et C les événements suivants :

$$\begin{aligned} D &= \{\text{toutes les boules tirées sont blanches}\},\\ E &= \{\text{les deux premières sont blanches}\},\\ F &= \{\text{au moins une boule est blanche}\},\\ G &= \{\text{seule la troisième est blanche}\},\\ H &= \{\text{une seule boule est blanche}\}. \end{aligned}$$

Ex 5.

On considère n fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ définies sur le même ensemble Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour i se 1 à n, on note :

$$A_i = \{\omega \in \Omega\ ,\ f_i(\omega) > 0\}$$

Exprimer à l'aide des A_i les ensembles :

$$B = \{\omega \in \Omega\ ,\ \max_{1 \leq i \leq n} f_i(\omega) > 0\} \quad \text{et} \quad C = \{\omega \in \Omega\ ,\ \min_{1 \leq i \leq n} f_i(\omega) > 0\}$$

Ex 6. Développement décimal illimité (1)

On considère un nombre réel $x \in [0, 1[$, on écrit son développement décimal illimité, et pour chaque i de $\mathbb{N}^*$ on note N_i l'événement :

$$N_i = \{\text{le } i\text{-ème chiffre après la virgule est un zéro}\}$$

1) Voici cinq événements. Décrire par une phrase ceux qui sont donnés de façon ensembliste, et exprimer de façon ensembliste à partir des N_i ceux qui sont définis par une phrase (française ou mathématique).

$\displaystyle\bigcap_{i=1}^{+\infty} N_i$,
$A = \{$le cinquième chiffre après la virgule est non-nul$\}$,
$B = \{$seul le cinquième chiffre après la virgule est non-nul$\}$,
$\displaystyle\bigcup_{i=1}^{+\infty} N_i$,
$\{100x \in \mathbb{N}\}$.

2) Exprimer et comparer les trois événements suivants :

$C = \{$les 4 premiers chiffres après la virgule sont nuls$\}$,
$C' = \{$le premier chiffre non-nul après la virgule est après le rang 4$\}$,
$\{x < 10^{-4}\}$.

3) On rappelle qu'un nombre décimal est un réel dont le développement décimal illimité ne comporte plus que des zéros au-delà d'un certain rang. Exprimer de façon ensembliste les événements :

$D_n = \{$ l'écriture de x ne comporte que des zéros à partir du rang $n\}$,
$D = \{$ x est un nombre décimal $\}$,
$E = \{$l'écriture de x comporte une infinité de zéros $\}$.

Comparer D et E.

Ex 7. Dans un lot de pièces métalliques rectangulaires, destinées à un assemblage, on sait que :

3% ont une longueur qui, s'écartant trop des normes, les rend inutilisables.

5% ont une largeur les rendant inutilisables.

2% s'écartent trop de la norme, à la fois par leur longueur et par leur largeur.

On prend une pièce au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit utilisable ?

Ex 8. On lance deux dés à six faces.

1) Décrire l'espace de probabilité associé à cette expérience et donner la probabilité d'obtenir
— un double ?
— au plus un nombre pair ?
— exactement un nombre pair ?
— deux nombres qui se suivent ?

2) Soit $k \in \{2, \ldots, 12\}$. Calculer la probabilité, notée q_k, d'obtenir, avec les deux dés, une somme égale à k. Montrer que la famille de réels $\{q_k,\ k = 2, \ldots, 12\}$ définit une probabilité Q sur l'espace $(\{2, \ldots, 12\}, \mathcal{P}(\{2, \ldots, 12\}))$.

3) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme supérieure ou égale à 6 ?

Ex 9. Développement décimal illimité (2)

On décide de "tirer au hasard" un réel x. On procède de telle façon que chaque chiffre, indépendamment des autres, a une chance sur dix d'être nul. On a alors, avec les notations de l'exercice 6 :

$$P(N_i) = \frac{1}{10} \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{i=m}^{n} N_i\Big) = \Big(\frac{1}{10}\Big)^{n-m+1}$$

1) Donner $P(A)$ et $P(\{x < 10^{-4}\})$. Les N_i, $i \in \mathbb{N}^*$, sont-ils deux à deux disjoints ?

2) Calculer la probabilité de

$$F_n = \{\text{le premier chiffre non-nul après la virgule est au rang } n\}$$

Les F_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont-ils deux à deux disjoints ?

3) Ecrire $\bigcup_{i=1}^{+\infty} N_i^c$ à l'aide des F_n et calculer sa probabilité. En déduire $P(\{x = 0\})$.

4) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, calculer la valeur de $P(D_m)$. On pourra utiliser la monotonie de la suite $(G_n)_{n \geq m}$ où $G_n = \bigcap_{i=m}^{n} N_i$.

5) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre décimal avec ce type de tirage aléatoire ?

Ex 10. Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements ayant chacun une probabilité 1 (on rappelle que $P(A_n) = 1$ n'implique pas $A_n = \Omega$). On note A leur intersection. Que peut-on dire de $P(A)$?

Ex 11. Formule de Poincaré

Vérifier que si A, B, C sont trois événements :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Un raisonnement par récurrence [1] nous permet de généraliser cette formule sous la forme suivante. Pour toute famille $A_1, \ldots, A_n$ d'événements :

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \cdots \\ &\quad \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \cdots \\ &\quad \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n). \end{aligned}$$

1. A ne pas faire *pendant la séance* de T.D.…il y a une preuve plus élégante basée sur l'espérance des indicatrices d'événements (cf. polycopié, exercices du chapitre 5).

Ex 12. Secrétariat (septembre 97 ex1, sans les v.a.)

Une secrétaire un peu distraite a tapé N lettres et préparé N enveloppes portant les adresses des destinataires, mais elle répartit au hasard les lettres dans les enveloppes. Pour modéliser cette situation, on choisit comme espace probabilisé Ω_N ensemble de toutes les permutations sur $\{1,\ldots,N\}$ muni de l'équiprobabilité P_N. Pour $1 \leq j \leq N$, on note A_j l'événement *la j-ème lettre se trouve dans la bonne enveloppe.*

1) Calculer $P_N(A_j)$.

2) On fixe k entiers $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ entre 1 et N. Dénombrer toutes les permutations σ sur $\{1,\ldots,N\}$ telles que $\sigma(i_1) = i_1$, $\sigma(i_2) = i_2$, ..., $\sigma(i_k) = i_k$. En déduire $P_N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$.

3) On note B l'événement *au moins une des lettres est dans la bonne enveloppe.* Exprimer B à l'aide des A_j.

4) Utiliser la formule de Poincaré pour calculer $P_N(B)$ et sa limite quand N tend vers l'infini.

Ex 13. Tribu, expérience, information

1) On lance un dé à quatre faces. Ecrire l'ensemble Ω de tous les résultats possibles.

2) Une personne lance le dé et annonce le résultat tiré. Ecrire la tribu $\mathcal{F}_2$ de tous les évènements observables.

3) La personne lance le dé et nous annonce seulement “pair” ou “impair”. Ecrire la tribu $\mathcal{F}_1$ des évènements observables pour nous.

4) La personne lance le dé et n'annonce rien ! A quelle la tribu $\mathcal{F}_0$ correspond cette fois l'expérience observée ?

5) On dit que $(\mathcal{F}_0,\ \mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2)$ est une suite croissante de tribus. En quoi est-elle croissante ? Qu'est-ce qui augmente, intuitivement, le long de cette suite ? Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, que représente la tribu $\mathcal{F}$?

6) La modélisation mathématique des produits financiers dérivés (stock-options) utilise des espaces probabilisés complexes. Ils sont munis de tribus $\mathcal{F}_t$ indexées par la date et contenant tous les événements observables de l'origine jusqu'à la date t. L'affirmation $\mathcal{F}_{2 \text{ janvier } 2017} \subset \mathcal{F}_{31 \text{ mars } 2017}$ est considérée par les quants comme une évidence. Pourquoi ?

Ex 14. Welcome in the real world

On fait une infinité de *"pile ou face"*. On note 0 pour *pile* et 1 pour *face.*

1) Comment représente-t-on un résultat ω de cette expérience ? Quel est l'ensemble Ω de tous les résultats possible ?

2) Pour toute suite finie $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ de zéros et de uns, on définit l'évènement :

$$E_{u_1 u_2 \cdots u_n} = \{\text{la suite tirée commence par } u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots,\ u_n\}$$

Exemples : $E_1 = \{$le tirage commence par 1 (face)$\}$
$E_{01} = \{$le tirage commence par 0 puis 1 (pile puis face)$\}$
$E_{1001} = \{$le tirage commence par 1, 0, 0, 1 (face, pile, pile, face)$\}$

On affecte à ces évènements les probabilités $P\left(E_{u_1 u_2 \cdots u_n}\right) = \dfrac{1}{2^n}$.
Ceci modélise-t-il les *"pile ou face"* d'une pièce truquée ou non-truquée ?

3) On parie sur l'un des résultats possibles $\omega \in \Omega$. Par exemple, une personne parie qu'elle va tirer $\omega = 0110110110110\ldots$, ou $\omega = 101001000100001\ldots$. En utilisant une propriété de continuité séquentielle monotone (laquelle ?) calculer les chances de tirer précisément le ω sur lequel on a parié.

4) Combien vaut la somme des probabilités de tous les résultats possibles de cette expérience ?

5) Qu'est-ce qu'une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$? Quelle partie de cette définition s'appelle σ-additivité ? Justifier pourquoi la valeur trouvée à la question 4 n'est pas en contradiction avec la σ-additivité. Est-elle en contradiction avec les notions de probabilités vues en Terminale ?