Université Lille 1 **Département de Mathématiques** **M.Fradon**
MASS L2 S4 **Calcul Différentiel** **2017-2018**

Fiche 1

Ex 1. 1) Donner la définition d'un ouvert de $\mathbb{R}$? de $\mathbb{R}^2$? de $\mathbb{R}^3$? Quelle est la définition d'un fermé de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$?

2) $]-1;1[$ est-il ouvert ou fermé dans $\mathbb{R}$? Même question pour $[1;2]$, $]0;1]$, $]0;+\infty[$ et $\mathbb{R}^+$.

3) On fixe $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. Dessiner $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 \ ; \ |y-x| < r\}$ et prouver que c'est un ouvert. Dessiner $\overline{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 \ ; \ |y-x| \leq r\}$ et prouver que c'est un fermé.

Ex 2. 1) Dessiner $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Est-il ouvert, fermé, ni l'un ni l'autre, dans $\mathbb{R}$?

2) Dessiner $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$. Est-il ouvert, fermé, ni l'un ni l'autre, dans $\mathbb{R}^2$?

3) Dessiner $(\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ dans $\mathbb{R}^2$. Est-il ouvert, fermé, ni l'un ni l'autre, dans $\mathbb{R}^2$?

Ex 3. 1) Donner une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est ni ouverte ni fermée.

2) Donner une partie de $\mathbb{R}^2$ qui n'est ni ouverte ni fermée.

3) Même question pour $\mathbb{R}^3$ et pour $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

Ex 4. 1) Représenter la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \leq y\}$$

Est-ce un ouvert, un fermé, ni l'un ni l'autre ?

2) Représenter la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1 \ \}$$

Est-ce un ouvert, un fermé, ni l'un ni l'autre ? Quel est son volume ?

3) Représenter la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1 \ \}$$

Est-ce un ouvert, un fermé, ni l'un ni l'autre ? Quel est son volume ?

Ex 5. 1) Représenter la partie de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x > 0 \text{ et } y > 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Est-ce un ouvert de $\mathbb{R}^2$? Si non, quel est le plus grand ouvert contenu dans $\mathcal{D}$? Est-ce un fermé de $\mathbb{R}^2$? Si non, quel est le plus petit fermé qui contient $\mathcal{D}$?

2) Représenter la partie de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{E} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}, (-1)^n \right) \right\}$$

Est-ce un ouvert de $\mathbb{R}^2$? Si non, quel est le plus grand ouvert contenu dans $\mathcal{E}$? Est-ce un fermé de $\mathbb{R}^2$? Si non, quel est le plus petit fermé qui contient $\mathcal{E}$?

3) A cause de quelle propriété des ouverts et des fermés peut-on définir *le plus grand ouvert contenu dans* une partie de $\mathbb{R}^2$, ou *le plus petit fermé qui contient* une partie de $\mathbb{R}^2$, mais pas le plus petit ouvert qui contient une partie de $\mathbb{R}^2$, ou le plus grand fermé contenu dans cette partie ?

Ex 6. 1) La partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 - 4x \leq y \leq -x^4 + 8x^3 - 19x^2 + 12x\}$$

est-elle ouverte, fermée, ni l'un ni l'autre ?

2) La dessiner. On notera $f(x) = x^2 - 4x$ et $g(x) = -x^4 + 8x^3 - 19x^2 + 12x$ et on remarquera que $f(4) = g(4)$.

3) Calculer son aire.

Ex 7. Ondulation exponentiellement décroissante : la goutte d'eau

On veut dessiner la fonction

$$f \ : \{\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2 + y^2)$$

f est la composée avec $(x, y) \longmapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ d'une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Laquelle ? Comment s'appelle la fonction $(x, y) \longmapsto \sqrt{x^2 + y^2}$? Dessiner g sur $\mathbb{R}$, en déduire le dessin de f sur $\mathbb{R}^2$. Quelle est l'allure des courbes de niveau de f ?

Ex 8. Esquimau

Dessiner la fonction

$$\begin{aligned} f \ : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 \leq 1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{aligned}$$

et décrire ses courbes de niveau.

Ex 9. Fonction de Cobb–Douglas : graphe et courbes de niveau

La fonction de Cobb–Douglas est utilisée pour modéliser la valeur produite v en fonction du capital investi c et du nombre d'heures de travail t. La productivité $p > 0$ est supposée fixée. Les élasticités α et β, qui dépendent des technologies disponibles, sont également supposées positives fixées[1] dans $]0; 1]$. L'expression de la fonction de Cobb–Douglas est

$$v(c, t) = p \ c^\alpha t^\beta$$

1) Sur quel domaine est-il logique de définir cette fonction ?

1. Vous avez pu étudier en Economie des modèles où les élasticités α et β varient à moyen terme. Pour simplifier l'étude mathématique de la fonction, on considérera ici α et β comme constantes, autrement dit on ne modélisera qu'une évolution à court terme.

2) Représenter son graphe en trois dimensions.

3) Calculer et tracer les lignes de niveau de v (en Economie on les appelle des isoquantes). Représenter le graphe de v en deux dimensions

Ex 10. Discontinuité à l'origine : représentation graphique

Représenter la fonction

$$f \ : \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$$

On pourra commencer par dessiner dans $\mathbb{R}^2$ les ensembles $\mathcal{D}_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y = ax\}$ et $\mathcal{C}_r = \{(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2 \ ; \theta \in]-\pi;\pi]\}$ pour $a = 1$ et $a = -1$ et $r = 1$. Regarder ce que vaut f sur ces ensembles, puis comment elle varie le long de la courbe $\mathcal{C}_r$ pour $r > 0$, et comment elle varie sur $\mathcal{D}_a$ pour a quelconque.

Cette fonction a-t-elle un prolongement naturel sur tout $\mathbb{R}^2$, autrement dit est-elle prolongeable par continuité à l'origine ?

Ex 11. Elasticité

En Economie, l'élasticité de f fonction de x répond à la question *De combien de % augmente f quand x augmente de 1% ?*. L'élasticité dépend bien sûr du point x autour duquel on fait varier la fonction. Rappelons que l'élasticité $\mathcal{E}_x^f$ de f est définie par

$$\mathcal{E}_x^f \times f(x) = f'(x) \times x \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathcal{E}_x^f = f'(x)\frac{x}{f(x)}$$

Pour une fonction de plusieurs variables, on définit des élasticités partielles par rapport à chacune des variables, par exemple :

$$\mathcal{E}_x^f = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \times \frac{x}{f(x,y)} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_y^f = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \times \frac{y}{f(x,y)}$$

1) Pour un certain bien, quand il est vendu au prix unitaire p, la quantité annuelle Q consommée par une personne de revenu mensuel r est

$$Q(p,r) = 8\frac{\sqrt{r}}{p\sqrt{p}}$$

Quelle est l'élasticité de la demande par rapport au prix ? Quelle est l'élasticité par rapport au revenu ? Si le prix augmente de 1%, de combien de % diminue la demande ?

2) Déterminer quelle forme doit avoir une fonction strictement positive de deux variables, définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, pour que ses deux élasticités soient constantes.

Ex 12. fonction de Cobb–Douglas : gradient et productivités marginales

La fonction de Cobb–Douglas est utilisée pour modéliser la valeur produite v en fonction du capital investi c et du nombre d'heures de travail t. La productivité $p > 0$ est fixée, les élasticités α et β aussi. L'expression de la fonction de Cobb–Douglas est

$$v(c,t) = p \ c^\alpha t^\beta$$

1) Rappeler sur quel domaine on définit cette fonction. Calculer le gradient en tout point du domaine de définition.

2) La production d'une entreprise est modélisées par une fonction de Cobb-Douglas de $\alpha = 0,35$ et $\beta = 0,65$. La production actuelle nécessite (par an) 800 000€ d'investissement et 120 000 heures de travail. On veut l'augmenter. Est-il préférable d'augmenter l'investissement ou le travail fourni ?

3) En Economie, on appelle $\frac{\partial v}{\partial c}$ et $\frac{\partial v}{\partial t}$ respectivement *productivité marginale du capital* et *productivité marginale du travail*. Pour savoir si elles augmentent ou diminuent quand le capital investi augmente ou le temps de travail augmente, calculer les dérivées secondes. Quel est leur signe ? Que signifie-t-il ?

4) Calculer la dérivée croisée $\frac{\partial^2 v}{\partial c \partial t}$ (les deux calculs possibles donne-t-ils le même résultat ?). Quel est son signe ? Que représente-t-elle en Economie ?

5) Le *taux marginal de substitution technique* indique localement de combien d'unités il faut augmenter c si t diminue d'une unité, pour que la production v reste constante.

$$\text{taux marginal de substitution technique} : \frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{\frac{\partial v}{\partial c}}$$

Calculer le taux marginal de substitution technique de v. Quelle est sa valeur numérique dans le cas ci-dessus ?