Université de Lille	**Département de Mathématiques**	**M.Fradon**
MASS L3 S5	**Probabilités Approfondies**	**2018-2019**

Examen du 18 décembre 2018
durée : 2 heures
Sans documents. Tout matériel électronique interdit.

Ex 0. Donner la définition d'une chaine de Markov.

Ex 1. Sur $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ on note $\mathcal{F}$ la plus petite tribu qui contient $\{1\}$ et $\{2,3\}$.

1) Expliciter $\mathcal{F}$ en donnant la liste de ses éléments.

2) On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. Les fonctions suivantes sont-elles $\mathcal{F}$-mesurables ? (justifier)

— la fonction f définie sur Ω par $f(1) = f(2) = f(3) = 0$ et $f(4) = f(5) = f(6) = 1$
— la fonction g définie sur Ω par $g(1) = g(3) = g(5) = 1$ et $g(2) = g(4) = g(6) = 2$

Ex 2. On rappelle que pour toute fonction borélienne positive f sur $\mathbb{R}$, l'intégrale de f par rapport à la mesure de comptage $\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \delta_k$ sur $\mathbb{N}^*$ est égale à la série : $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$.

1) Rappeler pour quels réels α la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.

2) En utilisant le théorème de convergence monotone (Beppo Levi), calculer la limite quand n tend vers l'infini de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-\frac{n+1}{n}}$

Ex 3. En utilisant le théorème de convergence dominée pour la mesure de Lebesgue, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^2 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} \, dx$$

Ex 4. On modélise le fonctionnement d'une machine. Pour simplifier, on considérera qu'on observe la machine à chaque heure et qu'elle a trois états possibles : 1 (bon état), 2 (mauvais état) et 3 (en panne). Le passage d'un état donné à l'état une heure après se fait de la façon suivante :

— quand la machine est en bon état, il y a 9 chances sur 10 qu'elle le reste, et 1 chance sur 10 qu'elle devienne en mauvais état ;
— quand elle est en mauvais état, il y a 3 chances sur 5 qu'elle le reste, 1 chance sur 5 pour qu'elle tombe en panne, et 1 chance sur 5 pour qu'un technicien s'en aperçoive et la répare. La réparation remet la machine en bon état.
— quand la machine tombe en panne, un technicien vient immédiatement la réparer. Une heure après, elle redémarre en bon état.

On note X_n l'état de la machine au bout de n heures.

1) Dessiner le graphe de la chaine de Markov représentant les états de la machine, et écrire

sa matrice de transition.

2) Ce matin, la machine a démarré en bon état. Quelle est la probabilité que trois heures après elle soit en bon état ?

3) La chaine est-elle irréductible ? Est-elle apériodique ?

4) A-t-elle une probabilité réversible ? Si oui, laquelle ? A-t-elle une probabilité invariante ? Si oui, laquelle ?

5) Quelle est la probabilité qu'à un moment quelconque, longtemps après la mise en service de la machine, elle soit en bon état ? (justifier)

6) En moyenne sur une longue période, quelle proportion du temps est perdue pour cause de panne ? (justifier)

Examen du 18 décembre 2018, corrigé

Ex 1.

1) La plus petite tribu sur $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ qui contient $\{1\}$ et $\{2,3\}$ est

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2,3\}, \{2,3,4,5,6\}, \{1,4,5,6\}, \{1,2,3\}, \{4,5,6\}\}$$

car cet ensemble est stable par passage au complémentaire et par union et intersection dénombrable.

2) La fonction f définie sur Ω par $f(1) = f(2) = f(3) = 0$ et $f(4) = f(5) = f(6) = 1$ est $\mathcal{F}$-mesurable. Cela peut se voir rapidement au fait que $f = \mathbf{1}\{4,5,6\}$ et $\{4,5,6\} \in \mathcal{F}$. On peut aussi le justifier pas à pas en vérifiant que tous les $f^{-1}(]-\infty;t])$ appartiennent à $\mathcal{F}$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f^{-1}(]-\infty;t]) = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F} \text{ si } t < 0 \\ \{1,2,3\} \in \mathcal{F} \text{ si } 0 \le t < 1 \\ \Omega \text{ si } t \ge 1 \end{cases}$$

La fonction g définie sur Ω par $g(1) = g(3) = g(5) = 1$ et $g(2) = g(4) = g(6) = 2$ n'est pas $\mathcal{F}$-mesurable car $\{1\} = [1;1]$ est un borélien de $\mathbb{R}$ et $g^{-1}(\{1\}) = \{1,3,5\} \notin \mathcal{F}$.

Ex 2.

1) On sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

2) Le résultat précédent assure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la série $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-\frac{n+1}{n}}$ converge.

u_n est l'intégrale par rapport à la mesure de comptage $\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k$ de la fonction f_n définie sur $\mathbb{N}$ par $f_n(k) = k^{-\frac{n+1}{n}} = e^{-(1+\frac{1}{n})\ln(k)}$. Les f_n sont positives sur $\mathbb{N}^*$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 + \frac{1}{n} \ge 1 + \frac{1}{n+1} \qquad \text{donc} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad e^{-(1+\frac{1}{n})\ln(k)} \le e^{-(1+\frac{1}{n+1})\ln(k)}$$

donc la suite de fonctions $(f_n)_n$ est croissante. D'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-(1+\frac{1}{n})\ln(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} e^{-(1+\frac{1}{n})\ln(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\ln(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

Ex 3. La fonction $f_n \ : \ x \longmapsto \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} \ \mathbf{1}_{[0;2](x)}$ est continue par morceaux donc mesurable sur $\mathbb{R}$. Elle est Riemann-intégrable sur l'intervalle fermé borné $[0;2]$, donc son intégrale de Riemann y coïncide avec son intégrale de Lebesgue :

$$\int_0^2 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} \, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} \ \mathbf{1}_{[0;2]}(x) \ d\lambda(x)$$

Pour tout x de $]0;2]$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} (1+nx^2)\ e^{n\ \ln(1+x^2)} = 0$
donc la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers $\mathbf{1}_{\{0\}}$.
D'après la formule du binôme, $(1+x^2)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{2k} \geq 1+nx^2$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0;2] \quad \left|\frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\right| \leq 1 \quad \text{donc} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |f_n| \leq \mathbf{1}_{[0;2]}$$

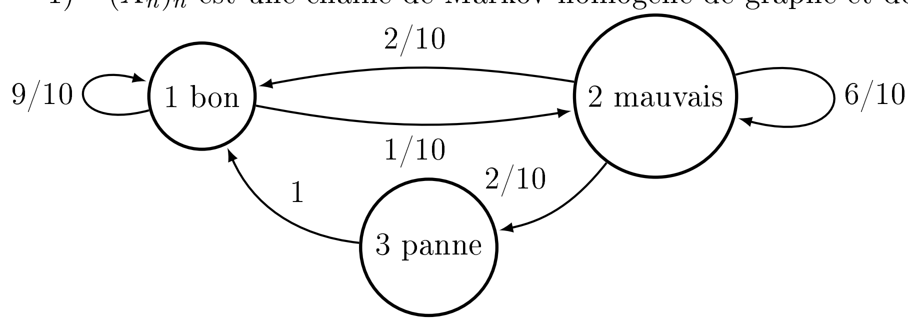
Comme $\mathbf{1}_{[0;2]}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue, le théorème de convergence dominée assure que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\, \mathbf{1}_{[0;2]}(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\, \mathbf{1}_{[0;2]}(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{0\}}\, d\lambda(x) = \lambda(\{0\}) = 0$$

En conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^2 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\, dx = 0$

Ex 4. Fiabilité d'une machine

1) $(X_n)_n$ est une chaine de Markov homogène de graphe et de matrice



$$\pi = \begin{pmatrix} 9/10 & 1/10 & 0 \\ 2/10 & 6/10 & 2/10 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) *Ce matin, la machine a démarré en bon état* signifie que la loi de X_0 est $\mu_0 = (1,0,0)$. Elle sera trois heures après dans l'état X_3 de loi μ_3.

$$\mu_1 = (1,0,0)\pi = (9/10, 1/10, 0) \qquad \mu_2 = (9/10, 1/10, 0)\pi = (83/100, 15/100, 2/100)$$

$$\mu_3 = (\frac{83}{100}, \frac{15}{100}, \frac{2}{100})\pi = (\frac{83\times 9 + 15\times 2 + 20}{1000}, \frac{83 + 15\times 6}{1000}, \frac{30}{1000}) = (\frac{797}{1000}, \frac{173}{1000}, \frac{30}{1000})$$

La probabilité que trois heures après la machine soit en bon état est de 797 chances sur 1000.

3) La chaine est irréductible (tout état est accessible à partir des autres) donc tous les états ont la même période, qui vaut 1 car $P(X_1 = 1 | X_0 = 1) > 0$ par exemple. La chaine est donc apériodique.

4) S'il existe une probabilité réversible $\mu = (a,b,c)$, elle doit satisfaire les conditions

$$a\frac{1}{10} = b\frac{2}{10} \qquad b\frac{2}{10} = c \times 0 \qquad a \times 0 = c \times 1$$

La seule solution est $\mu = (0,0,0)$ qui n'est pas une probabilité donc il n'existe pas de probabilité réversible.

S'il existe une probabilité invariante $\mu = (a, b, c)$, elle doit satisfaire les conditions

$$(a,b,c)\begin{pmatrix} 9/10 & 1/10 & 0 \\ 2/10 & 6/10 & 2/10 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (a,b,c) \qquad \Longleftrightarrow \; (9a+2b+10c, a+6b, 2b) = 10(a,b,c)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b = 5c \\ a+6b = 10b \\ 2b+10c = a \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \begin{cases} b = 5c \\ a = 20c \end{cases}$$

L'unique probabilité stationnaire est $(20/26, 5/26, 1/26)$. Elle est non réversible, évidemment.

5) La chaine étant irréductible et apériodique de probabilité stationnaire $(20/26, 5/26, 1/26)$, le théorème de convergence en loi assure que
pour tout état initial j on a $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 1|X_0 = j) = 20/26$.
Le conditionnement par tous les cas possibles $P(X_n = 1) = \sum_{i=1}^{3} P(X_n = 1|X_0 = j)P(X_0 = j)$ entraine

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 1) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{3} \frac{20}{26} P(X_0 = j) = \frac{10}{13}$$

Au bout d'un temps long après sa mise en service, la probabilité que la machine soit en bon état est de $20/26$.

6) La chaine étant irréductible de probabilité stationnaire $\mu = (20/26, 5/26, 1/26)$, le théorème ergodique indique que

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{X_n=3} = \frac{n}{n+1}\,\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{X_n=3} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \int \mathbf{1}_{x=3}\, d\mu(x) = 1/26$$

En moyenne sur une longue période, la proportion du temps perdue pour cause de panne est de $1/26$.

Devoir surveillé du 5 novembre 2018
durée : 1 heure
Sans documents. Tout matériel électronique interdit.

Ex 0. Questions de cours

1) Donner la définition d'une chaine de Markov.
2) Que signifie l'affirmation : *la chaine est irréductible.*

Ex 1. Tribu et fonctions mesurables

Sur l'ensemble $\Omega = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ on note $\mathcal{F}$ la plus petite tribu qui contient $\{-2, -1, 0\}$ et $\{0, 1, 2\}$.

1) Expliciter $\mathcal{F}$ en donnant la liste de ses éléments.
2) On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. Parmi ces trois fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$, lesquelles sont $\mathcal{F}$-mesurables ? (justifier).

— la fonction nulle : $\forall \omega \in \Omega \quad f_0(\omega) = 0$
— la fonction identité : $\forall \omega \in \Omega \quad f_1(\omega) = \omega$
— la fonction signe : $f_2(-2) = -1, \quad f_2(-1) = -1, \quad f_2(0) = 0, \quad f_2(1) = 1, \quad f_2(2) = 1$

Ex 2. Convergence d'intégrales

En utilisant le théorème de convergence monotone pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \ln\left(\frac{2}{1 + x^n}\right) dx$$

Ex 3. Convergence de séries

On rappelle (cf fiche 1 ex 21) que pour toute fonction borélienne positive f sur $\mathbb{R}$, l'intégrale de f par rapport à la mesure de comptage $\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k$ sur $\mathbb{N}$ est égale à la série : $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)$. En utilisant le théorème de convergence dominée, calculer la limite quand n tend vers l'infini de

$$u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2n + 3k}{4n + 5k}\right)^k$$

Devoir surveillé du 5 novembre 2018, corrigé

Ex 1. Tribu et fonctions mesurables

1) On utilise le fait qu'une tribu est stable par passage au complémentaire et par intersection dénombrable pour déterminer quels éléments autres que $\emptyset, \Omega$, $\{-2,-1,0\}$ et $\{0,1,2\}$ appartiennent à $\mathcal{F}$, jusqu'à obtenir une famille de parties stable par passage au complémentaire et par union dénombrable.

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{-2,-1,0\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}, \{-2,-1\}, \{0\}, \{-2,-1,1,2\}\}$$

2) Parmi les trois fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ de l'énoncé, seules la fonction nulle et la fonction signe sont $\mathcal{F}$-mesurables. Justifions-le :

— Pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, $f_0^{-1}(B) = \Omega$ si $0 \in B$ et $f_0^{-1}(B) = \emptyset$ si $0 \notin B$. Dans tous les cas, $f_0^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ donc f_0 est $\mathcal{F}$-mesurable.

— $\{1\} = [1;1]$ est un borélien de $\mathbb{R}$ et $f_1^{-1}(\{1\}) = \{1\} \notin \mathcal{F}$ donc f_1 n'est pas $\mathcal{F}$-mesurable.

— Pour la fonction signe, il est plus rapide d'utiliser le fait qu'il suffit de vérifier que tous les $f_2^{-1}(]-\infty;t])$ appartiennent à $\mathcal{F}$ pour prouver que f_2 est $\mathcal{F}$-mesurable.

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_2^{-1}(]-\infty;t]) = \begin{cases} \emptyset \text{ si } t < -1 \\ \{-2,-1\} \text{ si } -1 \leq t < 0 \\ \{-2,-1,0\} \text{ si } 0 \leq t < 1 \\ \Omega \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$$

Ex 2. Convergence d'intégrales

La fonction $f_n : x \longmapsto \ln(2) - \ln(1+x^n)$ est continue sur $[0;1]$ donc intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle. L'intégrale de Riemann sur un intervalle fermé borné coïncide avec l'intégrale de lebesgue donc :

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{2}{1+x^n}\right) dx = \int_{[0;1]} \ln(2) - \ln(1+x^n) \; d\lambda(x)$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout x de $[0;1]$ on a $2 \geq 1 + x^n \geq 1 + x^{n+1}$ donc

$$0 \leq \ln(2) - \ln(1+x^n) \leq \ln(2) - \ln(1+x^{n+1})$$

Les f_n forment une suite croissante de fonctions positives sur $[0;1]$ (autrement dit, les fonctions d'expression $\ln(2) - \ln(1+x^n)$ sur $[0;1]$ et nulles en dehors de $[0;1]$ forment une suite croissante de fonctions positives sur $\mathbb{R}$, toutes boréliennes puisque continues par morceaux). La limite simple de cette suite est $\ln(2)\mathbf{1}_{[0;1[}$.

En utilisant le théorème de convergence monotone

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \ln\left(\frac{2}{1+x^n}\right)dx &= \lim_{n\to+\infty}\int_{[0;1]} \ln(2)-\ln(1+x^n)\ d\lambda(x) \\
&= \int_{[0;1]} \lim_{n\to+\infty}\left(\ln(2)-\ln(1+x^n)\right)d\lambda(x) \\
&= \int_{[0;1]} \ln(2)\mathbf{1}_{[0;1[}\ d\lambda(x) = \ln(2)\lambda([0;1[) = \ln(2)
\end{aligned}$$

Ex 3. Convergence de séries

Pour toute fonction borélienne positive f sur $\mathbb{R}$, l'intégrale de f par rapport à la mesure de comptage $\mu = \sum_{k=0}^{+\infty}\delta_k$ sur $\mathbb{N}$ est égale à la série : $\int_{\mathbb{R}} f\ d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)$. Donc en notant f_n la fonction sur $\mathbb{R}$ qui vaut $\left(\frac{2n+3k}{4n+5k}\right)^k$ en chaque entier k, on a

$$u_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2n+3k}{4n+5k}\right)^k = \int_{\mathbb{R}} f_n\ d\mu$$

Remarquons qu'il n'est pas utile de spécifier les valeurs que prend f_n en dehors de $\mathbb{N}$ puisque $\mu(\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}) = 0$: changer une fonction sur un négligeable de la mesure ne change pas la valeur de son intégrale par rapport à cette mesure. On peut décider que les f_n sont nulles en dehors de $\mathbb{N}$, par exemple.

Pour tout entier k, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+3k}{4n+5k}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ donc la suite des fonctions f_n converge simplement sur $\mathbb{N}$. Elle est dominée sur $\mathbb{N}$ par une fonction qui ne dépend pas de n et qui est intégrable car $\frac{2n+3k}{4n+5k} \leq \frac{2}{3} \iff 6n+9k \leq 8n+10k \iff 0 \leq 2n+k$ donc

$$\forall k\in\mathbb{N}\qquad \left|\left(\frac{2n+3k}{4n+5k}\right)^k\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathbb{N}}\left(\frac{2}{3}\right)^k\ d\mu(k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k < +\infty$$

En utilisant le théorème de convergence dominée, on peut échanger la limite et l'intégrale

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2n+3k}{4n+5k}\right)^k = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n\ d\mu = \int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to+\infty} f_n\ d\mu = \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2}\right)^k\ d\mu(k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$$