Examen du 20 décembre 2019

Durée : 2 heures. Sans document. Tout matériel électronique interdit.

Ex 0. 1) Que signifie l'affirmation $\mathcal{F}$ *est une tribu sur* $\mathbb{Z}$?

2) Si f est une fonction de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{R}$, que signifie f *est* $\mathcal{F}$*-mesurable* ?

3) Que signifie μ *est une mesure sur* $(\mathbb{Z}, \mathcal{F})$?

Ex 1. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{Z}$ qui sont stables par changement de signe :

$$\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{Z} \text{ tel que } \forall k \in A \quad -k \in A\}$$

On définit deux fonctions sur $\mathbb{Z}$: $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ k & \longmapsto & k^2 \end{array}$ $\quad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ k & \longmapsto & k^3 \end{array}$

1) Donner les images réciproques par f et par g du singleton $\{36\}$ et de l'intervalle $]-\infty; 36]$.

2) Prouver que la fonction f est $\mathcal{F}$-mesurable et que la fonction g ne l'est pas.

Ex 2. En utilisant le théorème de convergence dominée pour la mesure de Lebesgue, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n \sin(1/x)}{x^2 + n^2 x\sqrt{x}}\, dx$$

Ex 3. Un rat vit dans une cage à trois étages. Pour les besoins d'une expérience, on l'observe à intervalles de temps réguliers. On constate que lorsqu'il est à l'étage du bas, où il dort, il a trois chance sur quatre d'y rester et une chance sur quatre de monter à l'étage 1. Lorsqu'il est à l'étage 1, où se trouve la nourriture, il a une chance sur deux d'y rester, une chance sur quatre de monter à l'étage 2, et une chance sur quatre de descendre à l'étage 0. Lorsqu'il est en haut, à l'étage 2, il a une chance sur deux d'y rester et une chance sur deux de descendre à l'étage 1.

On note X_n le numéro de l'étage où il se trouve au bout de n intervalles de temps.

1) Dessiner le graphe de la chaine de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Quelle est sa matrice de transition ?

2) Le rat se trouve actuellement à l'étage 2. Quelle est la probabilité que trois intervalles de temps plus tard il soit à l'étage 0 ?

3) La chaine est-elle irréductible ?

4) Quels états sont récurrents ? transients ? Quelle est leur périodicité ?

5) Cette chaine a-t-elle une probabilité réversible ? Si oui, laquelle ? A-t-elle une probabilité invariante ? Si oui, laquelle ?

6) En moyenne sur une longue période, quelle proportion de son temps le rat passe-t-il à l'étage 0 ? (justifier)

7) La position du rat à chaque étape dépend de sa position précédente, de sorte que sa position X_n à l'étape n n'est pas indépendante de sa position initiale X_0. Mais intuitivement, quand n est très grand donc au bout d'un temps très long, la position X_n du rat ne dépend presque plus de sa position initiale. Prouver cette indépendance asymptotique en montrant, grâce au théorème de convergence en loi, que

$$\forall e, e' \in \{0,1,2\} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(X_n = e' \ , \ X_0 = e) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = e')P(X_0 = e)$$

Examen du 20 décembre 2019, corrigé

Ex 1.

1) $f(k) = k^2$ et $g(k) = k^3$ pour tout k de $\mathbb{Z}$ donc

$$f^{-1}(\{36\}) = \left\{k \in \mathbb{Z} \ ; \ k^2 = 36\right\} = \{-6 \ ; \ 6\} \qquad g^{-1}(\{36\}) = \left\{k \in \mathbb{Z} \ ; \ k^3 = 36\right\} = \emptyset$$

On sait que $k^2 \leq 36 \iff |k| \leq 6$ donc

$$f^{-1}(\{]-\infty; 36]\}) = \left\{k \in \mathbb{Z} \ ; \ k^2 \leq 36\right\} = \{-6, -5, -4, \cdots, 6\} = [-6; 6] \cap \mathbb{Z}$$

La fonction $x \longmapsto x^3$ est strictement croissante et $3^3 = 27 \leq 36$ et $4^3 = 64 > 36$ donc

$$g^{-1}(\{]-\infty; 36]\}) = \left\{k \in \mathbb{Z} \ ; \ k^3 \leq 36\right\} =]-\infty; 3] \cap \mathbb{Z}$$

2) $\mathcal{F}$ est l'ensemble des parties de $\mathbb{Z}$ qui sont stables par changement de signe. Une fonction est donc $\mathcal{F}$-mesurable si l'image réciproque de tout borélien est stable par changement de signe. La non-mesurabilité de g s'en déduit :

$$g^{-1}(\{]-\infty; 36]\}) =]-\infty; 3] \cap \mathbb{Z} \quad \notin \mathcal{F} \text{ puisque } -5 \in g^{-1}(\{]-\infty; 36]\}) \text{ et } 5 \notin g^{-1}(\{]-\infty; 36]\})$$

Vérifions que f est mesurable. Il suffit de vérifier que $f^{-1}(\{]-\infty; t]\}) \in \mathcal{F}$ pour tout t réel, ce qui est bien le cas :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f^{-1}(]-\infty; t]) = \left\{k \in \mathbb{Z} \ ; \ k^2 \leq t\right\} = \left\{k \in \mathbb{Z} \ ; \ |k| \leq \sqrt{t}\right\} = \begin{cases} \emptyset \quad \in \mathcal{F} \text{ si } t < 0 \\ [-\sqrt{t} \ ; \ \sqrt{t}] \cap \mathbb{Z} \quad \in \mathcal{F} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

Ex 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_n \ : \ x \longmapsto \frac{n \sin(1/x)}{x^2 + n^2 x \sqrt{x}} \ \mathbf{1}_{[1;+\infty[}(x)$ est continue par morceaux donc mesurable sur $\mathbb{R}$. Elle est Riemann-intégrable sur l'intervalle $[1; +\infty[$ et il s'agit d'une intégrale de Riemann généralisée absolument convergente puisque

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{n \sin(1/x)}{x^2 + n^2 x \sqrt{x}} \right| \ dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{n}{n^2 x \sqrt{x}} \ dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{x}} \ dx < +\infty$$

Donc l'intégrale de Riemann de f_n coïncide avec son intégrale de Lebesgue :

$$\int_1^{+\infty} \frac{n \sin(1/x)}{x^2 + n^2 x \sqrt{x}} \ dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{n \sin(1/x)}{x^2 + n^2 x \sqrt{x}} \ \mathbf{1}_{[1;+\infty[}(x) \ d\lambda(x)$$

Pour tout x de $[1; +\infty[$ on a comme ci-dessus $\left| \frac{n \sin(1/x)}{x^2 + n^2 x \sqrt{x}} \right| \leq \frac{n}{n^2 x \sqrt{x}} \leq \frac{1}{n}$ donc donc la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle.
Cette suite de fonction est dominée par une fonction intégrable car

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [1; +\infty[\quad \left| \frac{n \sin(1/x)}{x^2 + n^2 x \sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{x \sqrt{x}}$$

et la coïncidence des intégrales de Lebesgue et des intégrales de Riemann absolument convergentes assure que

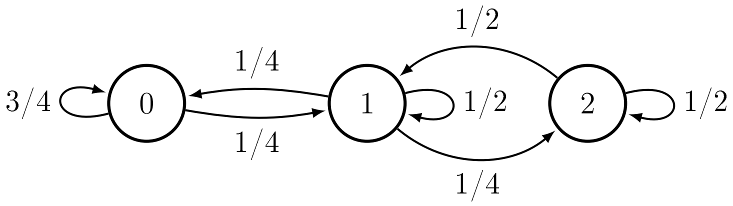
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x\sqrt{x}}\ \mathbf{1}_{[1;+\infty[}(x)\ d\lambda(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\ dx < +\infty \qquad \text{puisque } 3/2 > 1$$

D'après le théorème de convergence dominée

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n\sin(1/x)}{x^2+n^2x\sqrt{x}}\ dx &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{n\sin(1/x)}{x^2+n^2x\sqrt{x}}\ \mathbf{1}_{[1;+\infty[}(x)\ d\lambda(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin(1/x)}{x^2+n^2x\sqrt{x}}\ \mathbf{1}_{[1;+\infty[}(x)\ d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} 0\ d\lambda(x) = 0\end{aligned}$$

Ex 3. Déplacements d'un rat

1) $(X_n)_n$ est une chaine de Markov homogène de graphe et de matrice



$$\pi = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2) Observons le rat à partir du moment où il se trouve à l'étage 2, donc en prenant $X_0 = 2$, ce qui correspond à une loi initiale $\mu_0 = (0,0,2)$. On note μ_n la loi de X_n et on veut trouver la probabilité $\mu_3(\{0\})$ qu'il soit à l'étage du bas trois intervalles de temps plus tard.

$$\mu_1 = (0,0,1)\pi = (0,1/2,1/2) \qquad \mu_2 = (0,1/2,1/2)\pi = (1/8,1/2,3/8)$$

$$\mu_3 = (1/8,1/2,3/8)\pi = (\frac{3}{32}+\frac{1}{8}, \frac{1}{32}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}, \frac{1}{8}+\frac{3}{16}) = (\frac{7}{32}, \frac{15}{32}, \frac{10}{32})$$

La probabilité que le rat soit à l'étage 0 trois intervalles de temps plus tard est de 7 chances sur 32.

3) La chaine est irréductible (tout état est accessible à partir des autres)

4) L'irréductibilité implique que tous les états ont la même période, qui vaut 1 car $P(X_1 = 1|X_0 = 1) > 0$ par exemple. La chaine est donc apériodique. Au moins un état est récurrent puisque l'espace d'états est fini. L'irréductibilité implique qu'ils sont tous de même nature donc tous récurrents.

5) S'il existe une probabilité réversible $\mu = (a,b,c)$, elle doit satisfaire les conditions

$$a\ \frac{1}{4} = b\ \frac{1}{4} \qquad b\ \frac{1}{4} = c\ \frac{1}{2} \qquad a\times 0 = c\times 0 \qquad \text{i.e.} \qquad a = b = 2c$$

La probabilité $\mu = (2/5,2/5,1/5)$ est réversible, et aussi invariante puisque toute probabilité réversible est aussi invariante. La chaine étant irréductible, il y a unicité de la probabilité stationnaire.

6) La chaine est irréductible de probabilité stationnaire $\mu = (2/5,2/5,1/5)$ donc d'après le théorème ergodique

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{X_n=0} = \frac{n}{n+1}\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{X_n=0} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \int \mathbf{1}_{x=0}\ d\mu(x) = 2/5$$

En moyenne sur une longue période, le rat passe 40% de son temps à l'étage du bas.

7) La chaine étant irréductible et apériodique de probabilité stationnaire $(2/5, 2/5, 1/5)$, le théorème de convergence en loi assure que
pour tout état initial e et tout autre état e' on a $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = e'|X_0 = e) = \mu(\{e'\})$ autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty} P(\{X_n = e'\} \cap \{X_0 = e\}) = \mu(\{e'\})P(X_0 = e)$$

Le conditionnement par tous les cas possibles $P(X_n = e') = \sum_{i=0}^{2} P(X_n = e'|X_0 = i)P(X_0 = i)$ entraine

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = e') = \sum_{i=0}^{2} \mu(\{e'\})P(X_0 = i) = \mu(\{e'\})$$

Finalement

$$\forall e, e' \in \{0, 1, 2\} \quad \lim_{n\to+\infty} P(X_n = e' \ , \ X_0 = e) = \mu(\{e'\})P(X_0 = e) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = e')P(X_0 = e)$$