Univ. de Lille Département de Mathématiques M.Fradon, G.Castellan, M-F.Barme
L2 Maths S4 **Probabilités Discrètes** 2020-2021

Devoir surveillé de deuxième session du 21 juin 2021

Durée : 3 heures. Sans document. Sans calculatrice.

Ex 1. On s'intéresse à deux variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité. La variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et la variable aléatoire Y suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{0, 1, 2\}$.

On sait que leur covariance est nulle et qu'on a une chance sur douze d'avoir $X+Y = 3$. Trouver la loi du couple (X, Y), en expliquant bien la démarche suivie. X et Y sont-elle indépendantes ?

Ex 2. Le bibliothécaire de l'université d'Ankh-Morpork est un personnage lunatique qui adore les bananes. Chaque fois qu'on emprunte un livre, il exige en échange un nombre aléatoire Z de bananes. La loi de la variable aléatoire Z est la suivante :

k	0	1	2
$P(Z = k)$	$0,3$	$0,6$	$0,1$

1) Calculer l'espérance et la variance de Z.

2) Vingt-cinq étudiants souhaitent emprunter chacun quatre livres. Les demandes du bibliothécaire pour chaque livre sont indépendantes, toujours selon la loi ci-dessus. Calculer l'espérance et la variance du nombre U de bananes que vont coûter les cent livres.

3) Les vingt-cinq étudiants se cotisent pour acheter des bananes avant de se rendre à la bibliothèque. Ils veulent dépenser le moins possible, donc acheter le moins de bananes possible, tout en ayant au moins 99% de chances d'avoir assez de bananes pour tout emprunter. En utilisant l'inégalité de Tchebychev, déterminer combien de bananes peuvent suffire.

4) On peut aussi utiliser l'inégalité de Markov pour le moment d'ordre 1 afin de déterminer combien de bananes peuvent suffire. Quelle valeur obtient-on alors ? Laquelle des deux inégalités est la plus utile ici ?

Ex 3. Paul le poulpe : pieuvre et devin ?

Un poulpe promu pronostiqueur sportif ! Cela s'est produit en 2010 lors de la Coupe du Monde de football. En Allemagne, le poulpe d'un aquarium était "interrogé" à l'aide de deux boites décorées de drapeaux. Chaque boite contenait une moule. La première moule mangée par Paul le poulpe était censée indiquer le pays qui allait gagner le match. Après avoir pronostiqué correctement les résultats des quatre premiers matchs de l'Allemagne, Paul est devenu célèbre. Devant des journalistes du monde entier, et en direct à la télévision, il a prédit successivement la victoire de l'Allemagne en quarts de finale, sa défaite en demi-finale, sa victoire lors de la petite finale, et la victoire de l'Espagne sur les Pays-Bas en finale.

Quantité d'explications ont été avancées : tricherie des soigneurs, différence de taille des moules, dressage, vision polarisée chez les pieuvres (d'où une préférence pour les rayures horizontales, donc pour le drapeau allemand). Et même influence subliminale de la prédiction sur le moral des joueurs à partir du moment où le "poulpe infaillible" a été médiatisé.

Dans cet exercice, nous supposerons que les joueurs ne se laissent pas influencer, que les soigneurs sont honnêtes et que Paul et les autres animaux n'ont aucunes connaissances footballistiques : face à deux drapeaux, l'animal choisit au hasard (une chance sur deux [1]) indépendamment des choix qu'il

1. Dans cet exercice, les matchs se terminent par la victoire d'une équipe (pas de match nul).

a pu faire auparavant. Sous cette hypothèse de pur hasard, nous allons calculer les chances d'obtenir une série de pronostics corrects. Notre but est de comprendre si l'apparition d'un "pronostiqueur animal" est vraiment extraordinaire, ou si ça fait partie des coïncidences qui se produisent de temps en temps (et ne méritent pas qu'on en informe la planète).

1) Lors de l'Euro 2008, Paul le poulpe avait été interrogé avant chacun des six matchs de l'Allemagne, et quatre de ses pronostics étaient corrects. En supposant que le poulpe répond au hasard, quelle est la loi du nombre R de bonnes réponses pour six questions ? (justifier !). Quelle est la probabilité que le poulpe donne exactement quatre bonnes réponses ? Quelle est la probabilité qu'il donne *au moins quatre* bonnes réponses ?

Dans la suite, nous ne tiendrons pas compte des prévisions de 2008. Elles ont été peu médiatisées, et il n'est pas certain que le poulpe de 2008 soit le même que celui de 2010 (l'aquarium aurait acheté un nouveau "Paul" début 2010).

2) Lors de la coupe du Monde de 2010, Paul le poulpe a fait huit pronostics, tous corrects. En supposant que l'animal répond au hasard, quelle était la probabilité qu'il réponde juste huit fois ?

3) A y regarder de plus près, ce qui a été présenté au public n'est pas une série de huit questions posées à un animal quelconque. C'est plutôt une série de quatre questions posées à un animal "extraordinaire" (c'est parce que Paul avait déjà donné quatre réponses correctes que les média s'y sont intéressés). Il faut donc calculer les chances de trouver un animal "extraordinaire" (c'est-à-dire ayant déja fait quatre bons pronostics) et les chances que cet animal fasse des pronostics corrects pour les quatre matchs à venir.

Compte tenu de la passion des Allemands pour le football, plusieurs milliers d'entre eux se sont amusés à faire prédire des résultats sportifs par leur chien, leur perruche ou leur lapin. Si 120 animaux font chacun quatre pronostics, quelle est la loi du nombre N d'animaux dont tous les pronostics se révèleront justes ? Par quelle loi peut-on l'approcher ? Donner le nombre moyen d'animaux qui font quatre pronostics corrects et calculer une valeur approximative de la probabilité qu'au moins un des 120 animaux fasse quatre pronostics corrects (Faute de calculatrice, pour se faire une idée de la valeur de cette probabilité, on utilisera $e^7 > 1000$).

4) Parmi tous les animaux "extraordinaires", les journalistes (encouragés par les propriétaires de l'aquarium...) ont choisi Paul le poulpe. Sachant qu'il a déjà fait quatre pronostics corrects, quelle est la probabilité qu'il termine la coupe du monde avec huit pronostics corrects ? Paul est-il, finalement, si extraordinaire que ça ?

Ex 4. Utilisation du jeu de l'oie pour le calcul de séries

Le but de cet exercice est de calculer les sommes des trois séries :

$$s_0 = \sum_{i=1}^{+\infty} 6^{-\lfloor i/6 \rfloor} \quad s_1 = \sum_{i=1}^{+\infty} i\ 6^{-\lfloor i/6 \rfloor} \quad s_2 = \sum_{i=1}^{+\infty} i^2\ 6^{-\lfloor i/6 \rfloor}$$ où $\lfloor i/6 \rfloor$ désigne la partie entière de $i/6$.

1) On lance un dé (à 6 faces, équilibré). On note X le nombre de points obtenus. Pour k de 1 à 5, calculer $P(X = k | X \neq 6)$.

2) Un joueur lance le dé. S'il obtient 1, 2, 3, 4 ou 5, il avance son pion du nombre de cases correspondant. S'il obtient 6 il rejoue, et s'il obtient de nouveau 6 il rejoue à nouveau, jusqu'à ce qu'il obtienne 1, 2, 3, 4 ou 5. Il avance alors son pion d'autant de cases qu'il a obtenu de points en tout. Par exemple, si le joueur a fait 6, 6, 6 et 4, le pion avance de 22 cases. On note N le nombre de fois où le joueur lance le dé et Y le nombre de points obtenus lors du dernier lancer. Le pion avance de Z cases : exprimer Z en fonction de N et Y. Quel est l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs que Z peut prendre ?

3) Déterminer la loi de N. Donner son espérance $E(N)$ et sa variance $\mathrm{Var}(N)$. Exprimer les sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\, 6^{-n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\, 6^{-n}$ à l'aide de $E(N)$ et $\mathrm{Var}(N)$.

4) Déterminer la loi de Y. Calculer son espérance et sa variance.

5) En utilisant l'indépendance de N et Y, calculer l'espérance, la variance, puis la loi de Z.

6) En déduire les sommes des trois séries.

Univ. de Lille — Département de Mathématiques — M.Fradon, G.Castellan, M-F.Barme

L2 Maths S4 — **Probabilités Discrètes** — 2020-2021

Devoir surveillé de première session du 21 mai 2021

Durée : 3 heures. Sans document. Sans calculatrice.

Ex 1. On considère un vecteur aléatoire (X, Y) dont la loi est donnée par :

- $P(X = i, Y = j) = 0{,}1$ pour tout $i \in \{-1, 0, 1\}$ et $j \in \{1, 3\}$
- $P(X = i, Y = 2) = 0{,}2$ pour tout $i \in \{-1, 1\}$
- $P(X = 0, Y = 2) = 0$

1) Représenter la loi de (X, Y) sous forme de tableau.

2) Déterminer les lois de X et Y.

3) Calculer l'espérance et la variance de X et de Y.

4) Calculer la covariance de X et Y.

5) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

6) Déterminer l'espérance, la variance, et la loi de la somme $X + Y$.

Ex 2. **Cartes électorales oubliées**

Un jour de scrutin, 500 personnes se rendent dans un bureau de vote, munies de leur carte électorale. Chacune n'a qu'une très faible probabilité, égale à 0,2%, d'oublier sa carte électorale en quittant le bureau. On note N le nombre de cartes oubliées ce jour-là.

1) Quelle est la loi de N ? Justifiez votre réponse en précisant notamment quelle(s) hypothèse(s) vous faites.

2) Par quelle autre loi peut-on approcher la loi de N, et pourquoi ?

3) On veut connaitre la probabilité que *plusieurs* cartes soient oubliées dans ce bureau ce jour-là. En donner une expression exacte, puis une valeur approchée qu'on calculera numériquement. On prendra 0,368 comme valeur approchée de l'inverse de la constante $e \simeq 2{,}72$.

Ex 3. **Frites ou carottes**

1) Soit V une variable aléatoire ayant un moment d'ordre 2. En utilisant un résultat du cours, prouver que pour tous réels a et b strictement positifs

$$P\Big(\ X \leq E(X) - a \ \text{ ou } \ X \geq E(X) + b \ \Big) \quad \leq \quad \frac{\mathrm{Var}(X)}{(\min(a,b))^2}$$

2) Un restaurant d'entreprise sert chaque jour $n = 1440$ repas. Aujourd'hui, le menu propose "frites" ou "carottes". On sait d'expérience que chaque convive, indépendamment, a deux chances sur trois de choisir les frites et une chance sur trois de préférer les carottes. Donner la loi du nombre X de convives qui demandent des frites et du nombre Y de ceux qui veulent des carottes. Calculer les espérances $E(X)$ et $E(Y)$ et les variances $\mathrm{Var}(X)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

3) Si on prépare seulement $E(X)$ parts de frites et $E(Y)$ parts de carottes, on risque de devoir donner des frites à quelqu'un qui veut des carottes, ou l'inverse. Le chef envisage donc de prendre une marge de sécurité m et de préparer en tout $n + m$ parts (avec deux tiers de frites et un tiers

de carottes). Il veut avoir au moins 80% de chances de servir chacun selon ses goûts. m doit être petit pour éviter le gaspillage. Exprimer à partir de la variable X l'évènement

$$E = \{ \text{ les choix d'un ou plusieurs convives ne sont pas satisfaits } \}$$

Majorer la probabilité de E. En déduire une marge m suffisante pour avoir au moins 80% de chances de servir chacun selon ses préférences.

4) La nourriture réchauffée non consommée doit être jetée. Le chef trouve m trop élevé, il ne veut pas jeter m portions. Il décide de préparer d'avance seulement $E(X)$ parts de frites et $E(Y)$ parts de carottes. Il réchauffera au dernier moment quelques parts supplémentaires de frites ou de carottes s'il en manque pour satisfaire les demandes. Exprimer en fonction de X le nombre aléatoire M de parts supplémentaires réchauffées sur demande. Le chef pense qu'avec cette méthode, il a au moins 80% de chances de jeter moins de 40 portions. Prouver qu'il a raison.

Ex 4. Avant de pouvoir se prélasser sur le mont Olympe, les héros de la mythologie doivent réussir un examen proposé par Zeus, le dieu des dieux. Ils ne peuvent passer cet examen qu'une seule fois, et c'est Zeus qui choisit la date. Chaque jour, les nymphes dispensent aux étudiants un cours nouveau – le programme d'étude est donc infini ! Les soirs où l'ambroisie ne lui a pas embrumé le cerveau, Zeus interroge les prétendants sur un sujet pris au hasard avec une égale probabilité parmi les cours déjà étudiés. Un étudiant interrogé le cinquième jour a ainsi une égale probabilité d'être interrogé sur chacun des cinq premiers cours. Les jours où Zeus n'a pas les idées claires, il renonce à examiner les candidats. Et il faut bien avouer que le dieu des dieux a chaque jour (indépendamment) deux chances sur trois d'abuser de l'ambroisie.

Le jeune Phæton commence à suivre les cours au jour numéroté 1. On note J la variable aléatoire correspondant au jour où il sera interrogé et N la variable aléatoire désignant le numéro du cours sur lequel il sera interrogé.

1) Quelle est la loi de J ?

2) Calculer la probabilité que Zeus soit "indisponible" les six premiers jours. En déduire que $P(N > 6)$ est inférieure à 10%.

3) En discutant selon les valeurs de k, déterminer $P(\ N \leq 6 \mid J = k\ )$ puis démontrer que pour $j \geq 6$:

$$P(\ \{N \leq 6\} \cap \{J > j\}\ ) \quad \leq \quad \frac{6}{j+1}\ P(J > j)$$

Montrer alors que $P(\ N > 6 \mid J > 14\ )$ est supérieure à 60%.

4) Après deux semaines de beuverie céleste, Phæton en a assez de ne pas avoir été interrogé et commence à trouver ses révisions ennuyeuses. Sisyphe, un étudiant plus âgé et apparemment très au courant, lui affirme qu'il connaît de jeunes dieux ayant réussi l'examen et que plus des 9 dixièmes ont été interrogés sur le programme des 6 premiers jours. "Dans ces conditions" continue-t-il, "je ne vois pas pourquoi je potasserais des cours sur lesquels je risque peu d'être interrogé !"

A votre avis :

— Sisyphe a-t-il raison d'affirmer que l'interrogation porte neuf fois sur dix sur le programme des 6 premiers jours ?

— Phæton peut-il raisonnablement faire l'impasse sur les cours dispensés après le sixième jour ?

Univ. de Lille Département de Mathématiques M.Fradon, G.Castellan, M-F.Barme
L2 Maths S4 **Probabilités Discrètes** 2020-2021

Partiel du 27 mars 2021

Durée : 2 heures. Sans document. Tout matériel électronique interdit.

Ex 1. Numéros à six chiffres

On tire au hasard un numéro à six chiffres, autrement dit un nombre entier de 000 000 à 999 999. Calculer la probabilité des évènements

1) A : *le nombre tiré commence par* 99

2) B : *le nombre tiré comporte uniquement des chiffres impairs*

3) C : *le nombre tiré comporte exactement deux fois le chiffre neuf*

4) D : *le nombre tiré ne comporte pas plus d'une fois le chiffre neuf*

5) E : *le nombre tiré est constitué de six chiffres différents*

6) F : *le nombre tiré est constitué de six chiffres différents et croissants* (comme par exemple 013 579 ou 236 789)

Justifier les réponses en précisant notamment quel espace de probabilité on utilise. Laisser les probabilités sous forme d'expressions simples, on ne demande pas les valeurs numériques.

Ex 2. La variable aléatoire V suit la loi de Poisson de paramètre λ. L'évènement B est tel que pour chaque n de $\mathbb{N}$ on a $P(B \mid V = n) = 1/\beta^n$, avec $\beta > 1$ fixé.

Calculer pour chaque entier n la probabilité que V vaille n quand on sait que B est réalisé.

Ex 3. En allant acheter du beurre

Une laiterie produit des mottes de beurre de 250g emballées dans du papier. Les mottes sont ensuite suremballées par trois et vendues. L'emballage et le suremballage sont faits par deux machines, qui absorbent chacune la moitié de la production. La première est usée et chaque motte de beurre a trois chances sur quatre d'y être emballée avec un papier un peu froissé. L'autre machine est plus récente et elle n'a qu'une chance que quatre de froisser l'emballage. Le froissement ne nuit pas à la conservation du beurre. Il ne nuit pas non plus à la vente, le suremballage dissimulant le léger défaut d'esthétique.

1) Quelle est la loi du nombre X de mottes de beurre à emballage froissé dans un paquet de 3 mottes sorti de la machine usée ? On précisera quelle hypothèse vraisemblable on fait dans cette modélisation.

2) Quelle est la loi du nombre Y de mottes de beurre à emballage froissé dans un paquet de 3 mottes sorti de la machine récente ? (sous la même hypothèse).

3) On achète un paquet de trois mottes de beurre. Il contient un emballage froissé et deux non-froissés. Quelle est la probabilité qu'il vienne de la machine récente ?

4) Quelle est la loi du nombre Z d'emballages froissés dans un paquet de 3 mottes choisi au hasard parmi la production de la laiterie ? La représenter sous forme d'un tableau dont on justifiera le contenu.

Ex 4. On a vu des canards

Dans un parc naturel vivent des canards. Les trois quarts sont des colverts (canards bruns à cou vert) et les autres sont blancs. On suppose pour simplifier que les canards sont indépendants les uns des autres.

1) Un ornithologue observe les canards pendant un mois (30 jours). On note V le nombre de jours où le premier canard qu'il voit est blanc. Donner la loi de V .

2) Un randonneur traverse le parc. Il photographie tous les canards qu'il voit jusqu'à ce qu'il obtienne une photo d'un canard blanc. Quelle est la loi du nombre X de photos ? Quelle est la probabilité que X vaille 5 ?

3) Dans un pré hors du parc, un chasseur repère un groupe de 5 canards blancs et 7 canards colverts. Il en abat deux choisis au hasard. Quelle est la loi du nombre Y de canards blancs tués ? Quelle est la probabilité que les deux canards abattus soient de couleurs différentes ?

4) *(question bonus hors barème)*

Un autre randonneur traverse le parc en photographiant tous les canards qu'il croise jusqu'à ce qu'il possède une photo d'un canard colvert *et* une photo d'un canard blanc. Déterminer la loi du nombre W de photos prises.

On justifiera les réponses, on donnera les noms et paramètres des lois si elles en ont, et on laissera les valeurs sous forme de fraction simplifiée.