

---

---

## Packungen aus Kreisscheiben

Wie eine wahrscheinlichkeitstheoretische Sichtweise eine geometrische Analyse vervollständigen kann

---

---

Charlotte Dombrowsky, Myriam Fradon und Sylvie Rœlly

Charlotte Dombrowsky schloss ihre Schulausbildung 2015 ab, und absolvierte anschliessend ein Orientierungsjahr (ProTechnicale). Seit zwei Jahren studiert sie Mathematik an der ETH Zürich.

Myriam Fradon promovierte in Paris bei Patrick Cattiaux. Zu ihren Forschungsthemen gehören reflektierende Diffusionen und zufällige Dynamiken harter Kugeln. Seit 1996 ist sie Maitre de Conférences an der Université de Lille.

Sylvie Rœlly promovierte in Paris, wo sie auch habilitierte. Seit 2003 ist sie Professorin für Wahrscheinlichkeitstheorie an der Universität Potsdam. Ihre Forschungsinteressen sind zufällige interagierende Systeme und Diffusionsprozesse. Sie engagiert sich auch im Bereich der Schülerförderung, insbesondere im Rahmen des Projektes MATH.en.JEANS.

### Einführung

Schon immer fragten sich Ingenieur\*innen, Techniker\*innen, Händler\*innen, wie man am besten gleichgrosse Kugeln im Raum stapelt, zum Beispiel Kanonenkugeln, Orangen oder

Der englische Seefahrer Sir Walter Raleigh fragte sich einst, wie er in seinem Schiffs-laderaum möglichst viele Kanonenkugeln stapeln könnte. Johannes Kepler entwickelte daraufhin 1611 eine Vermutung über die optimale Anordnung der Kugeln. Diese Vermutung sollte sich als eine der härtesten mathematischen Nüsse der Geschichte erweisen. Selbst in der Ebene sind dichteste Packungen kongruenter Kreise eine Herausforderung. 1892 und 1910 veröffentlichte Axel Thue (kritisierte) Beweise, dass die hexagonale Kreispackung optimal sei. Erst 1940 lieferte László Fejes Tóth schliesslich einen wasserdichten Beweis für diese Tatsache. Eine Variante des Problems verlangt, Packungen mit endlich vielen kongruenten Kugeln zu finden, die eine gewisse quadratische Energie minimieren: Diese spannende geometrische Aufgabe wurde 1967 von Tóth gestellt. Sie ist auch heute noch nicht vollständig gelöst. In diesem Beitrag schlagen die Autorinnen eine originelle wahrscheinlichkeitstheoretische Methode vor, um in der Ebene Näherungen der Lösung zu konstruieren.

Heidelbeeren (siehe Abbildung 1). Einige versuchen, aus naheliegenden Gründen, das von den Kugeln beanspruchte Volumen zu minimieren, andere wollen die Dichte der erhaltenen Figur maximieren.



Abbildung 1 Feine Heidelbeerpackungen

Diese Art geometrischer Fragen kann man unter unterschiedlichen Aspekten betrachten:

- Geht es um Segmente (eindimensionale Sphären), Kreisscheiben (zweidimensionale Sphären), Kugeln (Dimension 3) oder Hypersphären (in einer grösseren Dimension als 3)?
- Ist die Anzahl der Sphären endlich oder unendlich?
- Falls sie endlich ist, versucht man, den Anteil des von den Sphären eingenommen Volumens in der konvexen Hülle der Konfiguration zu maximieren? Oder minimiert man die Oberfläche dieser konvexen Hülle? Oder versucht man, die Kusszahl – die Anzahl der Sphären, die eine einzige andere Sphäre berühren, ohne sie zu überlappen – zu maximieren? Oder versucht man, eine möglichst kompakte Konfiguration zu finden, deren Energie minimal ist?

Der\*Die Leser\*in, der\*die an diesen unterschiedlichen Problemstellungen und ihrer mathematischen Erläuterung interessiert ist, kann dazu die aktuelle und sehr klare Monografie [1] betrachten.

Wir werden uns im Folgenden auf Konfigurationen von gleichgrossen sich nicht überschneidenden Kreisscheiben in einer Ebene konzentrieren, die eine gewisse Energie minimieren.

Diese Konfigurationen finden Anwendungen in sehr vielen Bereichen, zum Beispiel in der Clusterchemie, wo diese als *Aggregate von Atomen* (siehe [15]) vorkommen; bei Verschlüsselungen, die für das Senden von Signalen benötigt werden (siehe [5]); in der Optik, um optimale optische Fasern zu entwerfen (siehe [12]); oder in der Logistik, zum Beispiel um folgende (wichtige!) Frage zu beantworten: Wie verpackt man möglichst viele Frankfurter Würstchen in einer zylinderförmigen Dose?

Wir verfolgen zwei Ziele, ein theoretisches und ein angewandtes.

Zuerst analysieren wir die Kreispackungen vom Standpunkt der diskreten Geometrie. Wir werden uns insbesondere mit sechseckigen Konfigurationen beschäftigen, welche bemerkenswerte Eigenschaften besitzen. Unter anderem berechnen wir explizit eine charakteristische Grösse, ihre *quadratische Energie*. Wir werden zeigen, dass kleine sechseckige Konfigurationen (deren Seitenlänge kleiner oder gleich 7 ist) optimale gitterartige Packungen sind. Das heisst, dass das Minimum der quadratischen Energie über alle Kreisscheibenkonfigurationen erreicht wird, in dem die Kreisscheiben auf dem dreieckigen Gitter angeordnet sind.

Diese Eigenschaft gilt jedoch nicht für grössere sechseckige Packungen. Auf der Suche nach Hinweisen zur Lösung der Frage, die Tóth 1967 stellte,

*What is the shape of a cluster of  $n$  spheres with equal radii minimizing their quadratic energy, i.e., their 2nd moment about their center of mass?*

verwenden wir eine ganz andere Methode, eine wahrscheinlichkeitstheoretische Methode. Wir konstruieren eine zufällige Dynamik von Kreisscheiben, die sich nach langer Evolution in einer fast optimalen Konfiguration stabilisiert. Mit der Simulation dieser Bewegung (nach einer sinnvollen Wahl der Parameter), kann man folgende vernünftige These aufstellen:

*Die Packungen aus Kreisscheiben, die die quadratische Energie minimieren, sind kreisförmig und auf einem dreieckigen Gitter zentriert.*

## 1 Optimale Kreispackungen und quadratische Energie

In diesem Abschnitt werden wir uns mit Packungen aus Kreisscheiben (häufig auch *pen-nies* im englischsprachigen Raum) beschäftigen, mit dem Ziel ihre quadratische Energie (auch *second moment* genannt) zu minimieren. Obwohl dieses Problem einfach und sehr angewandt scheint, ist es grösstenteils noch ungelöst, sobald die Anzahl der Kreisscheiben grösser als sieben ist.

In diesem Abschnitt werden wir die für unsere Analyse notwendigen mathematischen Grössen einführen, einige explizite Berechnungen der Energie ausführen und die Vielfältigkeit der noch verbleibenden unbeantworteten Fragen hervorheben.

### 1.1 Die quadratische Energie einer Konfiguration von Kreisscheiben

Wir nennen *Konfiguration von  $n$  Kreisscheiben* eine Menge  $\mathbf{x}$  aus  $n$  offenen Kreisscheiben mit Radius eins in der Euklidischen Ebene. *Die Scheiben dürfen sich nicht überschneiden.* Jede Konfiguration ist demnach durch die Position der Mittelpunkte der Kreisscheiben gegeben:

$$\mathbf{x} \equiv \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^2$$

die selbstverständlich, für alle  $1 \leq i < j \leq n$ , die Bedingung  $|x_i - x_j| \geq 2$  erfüllt, wobei  $|\cdot|$  die für die euklidische Norm verwendete Notation ist.

**Definition 1.1.** Wir nennen *quadratische Energie* einer Konfiguration  $\mathbf{x}$  von  $n$  Kreisscheiben die Summe der Quadrate der Distanzen zwischen jedem Paar von Mittelpunkten:  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|^2$ . Die *mittlere quadratische Energie* ist dann gegeben durch

$$\mathcal{E}_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|^2. \quad (\text{Mittlere Energie})$$

**Bemerkung.** Man kann auch  $\mathcal{E}_n(\mathbf{x})$  als Zweites Moment, mit Hilfe des Abstandes zwischen jeder Kreisscheibe und dem Gravitationszentrum der Konfiguration, ausdrücken:

$$\mathcal{E}_n(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - \bar{x}|^2 \quad \text{wobei} \quad \bar{x} := \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Wir können nun das weiter oben erwähnte Konzept der Optimierung definieren.

**Definition 1.2.** Eine Konfiguration  $\mathbf{x}_{\min}$  von  $n$  Kreisscheiben wird *optimal* genannt, falls ihre quadratische Energie minimal unter allen Konfigurationen mit  $n$  Kreisscheiben ist:

$$\mathcal{E}_n(\mathbf{x}_{\min}) = \min\{\mathcal{E}_n(\mathbf{x}); \mathbf{x} \text{ Konfigurationen mit } n \text{ Kreisscheiben}\}.$$

Wir nennen  $\mathcal{C}_{\min}$  die Menge der optimalen Konfigurationen, modulo Drehungen, Spiegelungen und Verschiebungen in der Ebene.

Schränkt man sich auf die Ebene ein, so kann man die Frage von Tóth für  $n \geq 2$  beantworten, indem man

- (1) die minimale quadratische Energie von Konfigurationen von  $n$  Kreisscheiben berechnet und
- (2) die Menge  $\mathcal{C}_{\min}$  von Konfigurationen, bei denen diese minimale Energie erreicht wird, bestimmt.



Abbildung 2 Optimale Konfigurationen von zwei, bzw. drei Kreisscheiben und ihre respektive mittlere Energie

Für  $n = 2$  und  $n = 3$  ist die Situation trivial und die Fragen (1) und (2) sind in der Abbildung 2 beantwortet. Die Menge  $\mathcal{C}_{\min}$  der optimalen Konfigurationen besteht jeweils aus einer einzigen Konfiguration.

Der Fall  $n = 4$  ist etwas subtiler. Die durchschnittliche Energie ist minimal für unendlich viele unterschiedliche Konfigurationen:  $\text{card } \mathcal{C}_{\min} = +\infty$ . Alle diese optimalen Konfigurationen zeigen eine trapezartige Form. Man erhält sie, indem man zwei obere Kreisscheiben auf zwei unteren Kreisscheiben rollen lässt, so dass die Zahl der Kontaktpunkte wenigstens gleich 4 ist, siehe Abbildung 3.



Abbildung 3 Beispiele der optimalen Konfigurationen für vier Kreisscheiben:  $\mathcal{E}_4(\mathbf{x}_{\min}) = 8$

Bis auf Rotationen und Translationen sind diese Konfigurationen durch den Winkel  $\theta$  zwischen den beiden roten Segmenten bestimmt. Indem man den Ursprung der Euklidischen Ebene auf das Zentrum der unteren, linken Scheibe legt, erhält man:

$$C_{\min} = \left\{ \{(0, 0), (2, 0), 2(\cos \theta, \sin \theta), 2(1 + \cos \theta, \sin \theta)\}, \theta \in \left[ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right] \right\}.$$

Durch Nachrechnen überprüfen wir, dass in dieser Menge die mittlere Energie konstant ist: für beliebige  $\theta \in \left[ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right]$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_4(\mathbf{x}_{\min}) &= \frac{1}{4} \left( 4 \times 2^2 + |2(1 + \cos \theta, \sin \theta)|^2 + |2(\cos \theta, \sin \theta) - (1, 0)|^2 \right) \\ &= 2^2 + (2 + 2 \cos \theta) + (2 - 2 \cos \theta) = 8. \end{aligned}$$

Für  $n = 5$  oder  $n = 6$  ist die Antwort auf die Frage von Tóth nicht offensichtlich. Die in Abbildung 5 ersten beiden dargestellten optimalen Konfigurationen kann man als Teilmengen der Margerite, der optimalen Konfiguration für  $n = 7$ , interpretieren. Diese letztere wurde 1974 durch die Mathematikerin A. Temesvári in einer bemerkenswerten und fast unbekanntem geometrischen Arbeit [16] in ungarischer Sprache beschrieben, siehe Abbildung 4.

I.  $k_2$  u.  $k_4$  körbe érintők, a többi távolság  $\geq 1$  (12. ábra). Ugyamilyen típusú alakzat létezik, ha  $k_2, k_4$ -ba érintők.

II.  $k_2, k_4$ -ba érintők. Ekkor  $A_1A_2A_3A_4$  is rombusz, így  $A_1A_2A_3A_4$  paralelogramma (13. ábra). Ha  $k_1, k_4$ -be érintők, a konvex burkú ugyancsak paralelogramma lesz.

12. ábra

Az I. esetben  $A_1A_2 = A_1A_4$  miatt  $A_1A_2 = A_1A_4$ , tehát a 10. segédtétel úgy alkalmasz, hogy  $A_1A_4$  njön és  $A_1A_4$  két egységnyi legyen ( $k_2$  csak akkor érintkezik  $k_4$ -ba az  $A_1A_4$  njön  $\leq 180^\circ$  esetén, ha  $A_1A_4$  is egységnyi volt és ekkor  $A_1A_4 = 2$ ). Mivel  $A_1A_2 = 1$ , így  $A_1A_2A_4$   $\leq 60^\circ$ , így  $A_1A_4 \geq \sqrt{3}$ . Az  $A_1A_4 = 1$ , vagyis  $A_1A_4 < \sqrt{3} \leq 60^\circ$ , így az  $A_1A_2A_4$  háromszög felírt cosinus tételből

$$A_1A_4 = 1 + 4 - 4 \cos A_2A_1A_4 \leq 3$$

adódik, amiből  $A_1A_4 = \sqrt{3}$ . Így

$$\sum_{i < j} A_iA_j = 2 + 2^2 + A_1A_2 + A_1A_4 \geq 2 + 2^2 + 2 \cdot \sqrt{3}, \text{ ha } 0 < v \leq 2$$

(5) ill.

$$\sum_{i < j} A_iA_j \geq 2 + 2^2 + 2 \cdot \sqrt{3}, \text{ ha } v = 0.$$

Az  $A_1A_2A_3A_4A_5$  ötszögre a becsülés

$$\delta_1(5) \geq 7 + 2^2 + 2 \cdot \sqrt{3}, \text{ ha } 0 < v \leq 2$$

(6) ill.

$$\delta_1(5) \geq 7 + 2^2 + 2 \cdot \sqrt{3}, \text{ ha } v = 0.$$

(5)-öt és (6)-ot összeadva

$$\delta_1(6) = \delta_1(6), \text{ ha } 0 < v \leq 2$$

ill.

$$\delta_1(6) = \delta_1(6), \text{ ha } v = 0$$

adódik, mivel az egyenlőség (5)-ben és (6)-ban egyszerre nem léphet fel.

A II. esetben az  $A_1A_2A_3A_4$ -et csökkentjük az  $A_1A_2A_3A_4$  paralelogrammában (13. ábra). Ekkor az átlók négyzetösszege állandó, így az I. segédtételből következik, hogy  $A_1A_2 + A_3A_4$  csökken, ha  $0 < v \leq 2$  és nő, ha  $v = 0$ . A többi távolság ugyancsak marad és végül  $k_2$  és  $k_3$  és  $k_4$  körök is érintkeznek (14. ábra). A változtatás után a távolságösszeg:  $\delta_1(6) = 9 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot \sqrt{3} + 3$ , amire  $\delta_1(6) = \delta_1(6)$ , ha  $0 < v \leq 2$ , ill.  $\delta_1(6) = \delta_1(6)$ , ha  $v = 0$ .

A középpontok konvex burka az  $A_1A_2A_3A_4A_5$  ötszög és a  $k_1, \dots, k_4$  körök érintik  $k_1$ -et, tehát a  $k_2, \dots, k_4$  körök középpontját egy egységnyire  $A_1$  középponttól körén vannak és mindegyik oldalhoz tartozó középponti szög kisebb-egyenlő  $120^\circ$  és nagyobb-egyenlő  $60^\circ$  (15. ábra).

Egy sokszög másodszorosított ércsúcsait összekötve állítunk a későbbiekben „másodítottoknak” nevezünk. Az ötszögünk minden „másodítottját” tartozó középponti szög a  $[120^\circ, 180^\circ]$  intervallumban van.

A  $v = 1$  esetben a hatványösszeg megfelelő változtatásával a következőképpen juthatunk el a  $\delta_1(6)$ -nak megfelelő elrendezéshez. Legyen pl. az  $A_1A_2$  a legnagyobb oldal.  $A_1$  körül  $k_2$ -ig  $k_2$ -ig,  $k_2$ -et  $k_3$ -ig, majd együtt  $k_3$ -ot és  $k_4$ -ot  $k_2$ -ig végül  $k_2$ -et és  $k_4$ -at együtt  $k_2$ -ig forgatjuk. A 4. segédtételből következik, hogy egy-egy forgatás végére  $\delta_1(6)$  megfelelően változott és végül  $\delta_1(6)$ -nak megfelelő elrendezést kaptuk.

Az  $1 < v \leq 2$  esetben tegyük fel, hogy pl.  $A_1A_4$  a legnagyobb „másodított” és  $A_1A_2 = A_1A_4$ . Forgassuk  $A_1$  körül  $k_2$  és  $k_4$  köröket együtt, míg  $k_2$  u.  $k_4$ -ba nem érintkezik  $A_1$  és a 9. segédtétel miatt a hatványösszeg csökken és  $A_1A_2 = A_1A_4$ . Ezután  $A_1$  körül  $k_2$  és  $k_4$  köröket forgatjuk együtt, míg  $k_2$  u.  $k_4$ -be nem érintkezik. Ha ezután pl.  $A_1A_2 = A_1A_4$ , akkor  $A_1$  körül együtt forgatjuk a  $k_2$  és a  $k_4$  kört, míg  $k_2$  u.  $k_4$ -ba

13. ábra

14. ábra

15. ábra

érintkezik.  $\delta_1(6)$  a végső helyzetre nyilván csökkent és  $A_1A_2A_3 \leq 180^\circ$ . A 3. segédtétel szerint tovább csökkentünk, ha  $k_2$ -et  $A_1$  körül  $k_2$ -ig forgatjuk. Így eljutottunk a  $\delta_1(6)$ -nak megfelelő elrendezéshez.

A további esetek [1]-hez hasonlóan vizsgálhatók.

Legyen  $n = 7$ .

Ha a középpontok konvex burka bétszög, a 2. segédtétel miatt elegendő az egységnyi oldalú esetet foglalkozni.

Egy sokszög harmadszorosított ércsúcsait összekötve állítunk a későbbiekben „harmadítottoknak” nevezünk.

Vegyük az előbbi bétszög „harmadítottját”. Belátjuk, hogy legfeljebb négy „harmadított” nem nagyobb  $\sqrt{3}$ -nál, és ezek csak úgy helyezkedhetnek el, hogy egy-

Abbildung 4 Ausschnitt aus dem Artikel [16] von A. Temesvári

Wir heben hervor, dass die Mittelpunkte dieser optimalen Konfigurationen als benachbarte Punkte auf einem dreieckigen Gitter liegen, das wir von nun an  $\mathcal{T}$  nennen.



Abbildung 5 Die einzigen optimalen Konfigurationen von 5 (bzw. 6 oder 7) Kreisscheiben in der Margeritenform, in der ein bzw. zwei Blütenblätter fehlen. Die Mittelpunkte der Kreisscheiben sind auf dem Gitter  $\mathcal{T}$ .

Für  $n > 7$  ist die Beschreibung von  $\mathcal{C}_{\min}$  bis heute unvollständig. Das erfolgreichste Ergebnis erreichte Chow [3], der die quadratische Energie nur für gitterartige Konfigurationen – deren Mittelpunkte auf  $\mathcal{T}$  liegen – minimieren konnte.

Wir bemerken auch, dass die Margerite eine sechseckige Konfiguration ist, was kein Zufall ist, da die Zahl 7 die erste nicht triviale *zentrierte Sechseckszahl* ist. Darum werden wir uns nun auf Konfigurationen konzentrieren, deren Kardinalität eine dieser interessanten Zahlen ist.

## 1.2 Schönheit und Nutzen der zentrierten Sechseckszahlen

Wir wiederholen zuerst die algebraische Definition.

**Definition 1.3.** Eine *zentrierte Sechseckszahl*  $n$  ist eine ganze Zahl  $n(h)$ , die sich auf folgende Art zerlegen lässt:

$$n(h) = 1 + 6 \frac{h(h-1)}{2} = 3h^2 - 3h + 1 = h^3 - (h-1)^3 \quad (1)$$

für eine feste ganze Zahl  $h$ .

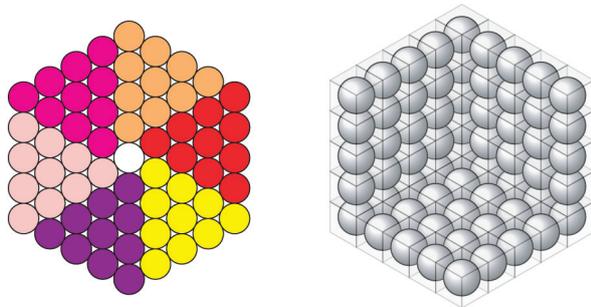


Abbildung 6 Zerlegung der Sechseckszahl  $n(h)$  in sechs Blütenblätter (erster Term in (1)), oder in die Differenz von zwei konsekutiven Würfeln (letzter Term in (1))

Sie entspricht der Anzahl ähnlicher Kreisscheiben, die man in einem regelmässigen Sechseck auf dem dreieckigen Gitter  $\mathcal{T}$  um eine zentrierte Kreisscheibe mit Gravitationszentrum

$\bar{x}$  der Konfiguration anordnen kann. Die Zahl  $h$  stellt also die Anzahl der angeordneten Kreisscheiben auf jeder Seite des Sechseckes dar oder auch die Anzahl der Schichten im Sechseck (der graphische Beweis ist in der Abbildung 6 gegeben.) Man überprüft leicht, dass jedes der sechs farbigen Blütenblätter aus  $\frac{h(h-1)}{2}$  Kreisscheiben besteht. Abbildung 7 zeigt die graphische Darstellung der sechseckigen Konfigurationen der Seitenlänge  $h = 1, 2, 3, 4$  und  $5$ .

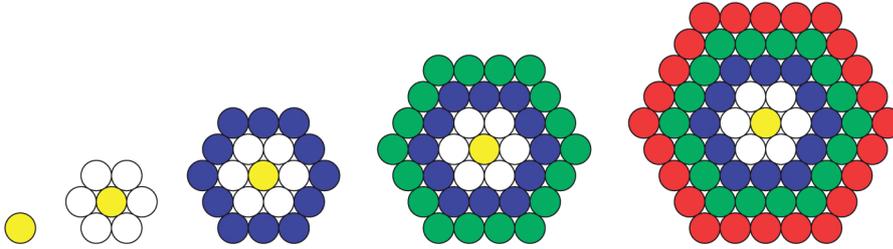


Abbildung 7 Abbildung der sechseckigen Konfigurationen  $\mathbf{x}_{\text{hex}}(1)$ , resp.  $\mathbf{x}_{\text{hex}}(2)$ ,  $\mathbf{x}_{\text{hex}}(3)$ ,  $\mathbf{x}_{\text{hex}}(4)$  und  $\mathbf{x}_{\text{hex}}(5)$ , von Kardinalität  $n(1) = 1$  resp.  $n(2) = 7$ ,  $n(3) = 19$ ,  $n(4) = 37$  und  $n(5) = 61$ .

### 1.3 Berechnung der mittleren quadratischen Energie einer sechseckigen Konfiguration

Zur Vereinfachung nennen wir  $E(h)$  die mittlere quadratische Energie der sechseckigen Konfiguration  $\mathbf{x}_{\text{hex}}(h)$  der Seitenlänge  $h$ , und der Kardinalität  $n(h)$ :

$$E(h) := \mathcal{E}_{n(h)}(\mathbf{x}_{\text{hex}}(h))$$

#### 1.3.1 Konfigurationen von kleiner Grösse

In diesem Abschnitt werden wir die zwei kleinsten, nicht trivialen sechseckigen Konfigurationen behandeln.

Wir beginnen mit der Margerite der Seitenlänge  $h = 2$ . Wir nummerieren zuerst die Kreisscheiben, dabei fangen wir im Mittelpunkt an und folgen den zwei Schichten. Wir

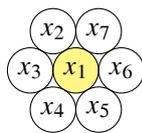


Abbildung 8 Nummerierung der sechseckigen Konfiguration der Seitenlänge  $h = 2$  und Kardinalität  $n(2) = 7$

benutzen nun den Ausdruck des zweiten Momentes, um die quadratische Energie dieser Konfiguration zu berechnen. Da  $x_1$ , der Mittelpunkt der zentralen Kreisscheibe, dem Gravitationszentrum entspricht, erhalten wir :  $E(2) = \sum_{i=2}^7 |x_i - x_1|^2 = 6 \cdot 2^2 = 24$ .

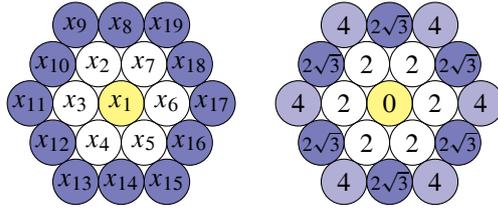


Abbildung 9 Links: Nummerierung der sechseckigen Konfiguration  $\mathbf{x}_{\text{hex}}(3)$  und ihrer 3 Schichten; Rechts: Abstand der Mittelpunkte der Kreisscheiben zum Gravitationszentrum  $\bar{x} = x_1$

Wir berechnen nun die Energie einer Konfiguration der Seitenlänge  $h = 3$ . Auch hier benutzen wir den Ausdruck des zweiten Momentes und führen das Gravitationszentrum  $x_1$  und die bereits berechnete Energie ein, um die mittlere quadratische Energie dieser Konfiguration zu beschreiben.

$$E(3) = E(2) + 6 \left( (2\sqrt{3})^2 + 4^2 \right) = 192.$$

Wir stellen nun zwei sehr unterschiedliche Kontexte vor, in denen die Packung aus  $n(3)$  Kreisscheiben auftaucht. Eine Skulptur in der Kathedrale von Magdeburg aus dem 13. Jahrhundert stellt den germanischen Kaiser Otto I. und seine Frau Editha dar. Er hält stolz eine sechseckige Konfiguration mit 19 Kreisscheiben in seiner rechten Hand, deren Interpretation bis heute ein Mysterium bleibt (und somit eine Quelle der Uneinigkeit zwischen Historiker\*innen).

Ingenieur\*innen haben empirisch herausgefunden, dass die sechseckige Geometrie einen optimalen Widerstand bildet. Darum wurde sie beispielsweise beim Bau von Kabeln benutzt: Die Kabel der 1883 eingeweihten Brooklyn Bridge bestehen aus  $19 = n(3)$  Leitungen, die wiederum aus  $331 = n(11)$  metallischen Fäden des Durchmessers  $1/8$  bestehen, siehe Abbildung 11.

### 1.3.2 Energie einer sechseckigen Konfiguration beliebiger Größe

In diesem Abschnitt präsentieren wir eine explizite Formel. Die Grundlage für den Beweis bildet das zweite Moment, sowie die Invarianz jeder sechseckigen Konfiguration unter einer Rotation von  $\pi/3$ , illustriert in Abbildung 6.

**Proposition 1.1.** Die mittlere quadratische Energie einer sechseckigen Konfiguration  $\mathbf{x}_{\text{hex}}(h)$  ist gegeben durch

$$E(h) = h(h-1)(5h(h-1)+2) = \frac{(n(h)-1)(5n(h)+1)}{9} \quad (2)$$

**Bemerkung.** Die Energie  $E(h)$  ist in der Tat eine Funktion von  $\frac{h(h-1)}{2} = \binom{h}{2}$ , wobei  $\binom{h}{2}$  nichts anderes ist als die Kardinalität jedes Blütenblattes der sechseckigen Konfiguration der Seitenlänge  $h$ . Darüber hinaus verallgemeinert sich diese Formel ohne Weiteres für Kreisscheiben vom beliebigen Radius  $r$ :  $E(h) = (2r)^2 \binom{h}{2} \left( 5 \binom{h}{2} + 1 \right)$ .

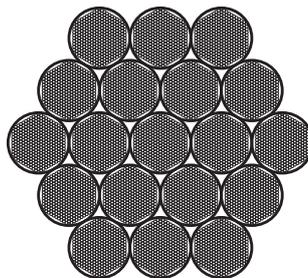
Abbildung 10 Editha und Otto, Magdeburg, 1245<sup>1</sup>

Abbildung 11 Brooklyn Bridge (New York City Brooklyn Bridge – Currier &amp; Ives 1877) und ihre Kabel

*Beweis.* Indem wir wie oben die Kreisscheiben schichtweise nummerieren, erhalten wir die rekursive Formel

$$E(h+1) = E(h) + \sum_{i=n(h)+1}^{n(h+1)} |x_i - x_1|^2. \quad (3)$$

Dank der Zerlegung der Sechsecke in sechs identische Blütenblätter (siehe Abbildung 6), ist der Zuwachs der mittleren Energie  $E(h+1) - E(h)$  sechs mal der Anteil der rosafarbenen Kreisscheiben der Abbildung 12. Wenn wir den Ursprung in  $\bar{x} = x_1$  fixieren, so haben alle diese Kreisscheiben die gleiche Ordinate, gegeben durch  $\frac{\sqrt{3}}{2}2h = \sqrt{3}h$ .

<sup>1</sup>Dieses Wikipedia und Wikimedia Commons Bild des Users Chris 73 ist frei verfügbar unter [//commons.wikimedia.org/wiki/File:HerscherpaarMagdeburgCathedral.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HerscherpaarMagdeburgCathedral.jpg) unter der creative commons cc-by-sa 3.0 Lizenz.

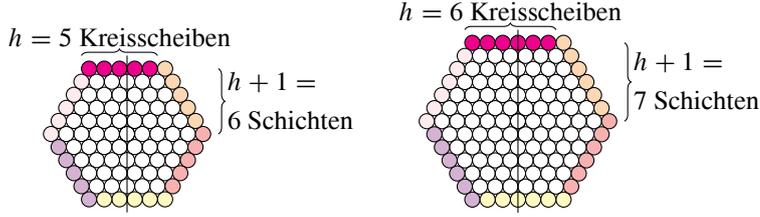


Abbildung 12 Die äusseren Kreisscheiben eines Blütenblattes, hier in rosa, sind verantwortlich für  $1/6$  der Steigerung der mittleren Energie  $E(h+1) - E(h)$ .

Der Unterschied der Abszissen zweier nebeneinanderliegender rosafarbigen Kreisscheiben beträgt zwei, dabei ist die niedrigste Abszisse  $-h$  und die höchste  $h-2$ . Die Abszisse der orangefarbenen Scheibe, die nicht zu dem Blütenblatt gehört, ist  $h$ . Somit folgt:

$$\sum_{i=n(h)+1}^{n(h+1)} |x_i - x_1|^2 = 6 \left( \sum_{k=0}^{h-1} (-h+2k)^2 + 3h^3 \right) = 24 \left( \sum_{k=0}^{h-1} k^2 - h \sum_{k=0}^{h-1} k + h^3 + 3h^3 \right).$$

Da  $\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$  und  $\sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$  folgt

$$\sum_{i=n(h)+1}^{n(h+1)} |x_i - x_1|^2 = 24 \left( \frac{(h-1)h(2h-1)}{6} - h \frac{(h-1)h}{2} + h^3 \right) = 4h(5h^2 + 1).$$

Die Formel (3) zusammen mit dem obigen Ergebnis ergibt:

$$E(h) = \sum_{l=0}^{h-1} 4l(5l^2 + 1) = 20 \sum_{l=1}^{h-1} l^3 + 4 \sum_{l=1}^{h-1} l.$$

Zusammen mit  $\sum_{l=1}^m l^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$  und  $(h-1)h = \frac{n(h)-1}{3}$  folgt die Aussage.  $\square$

#### 1.4 Sind die grossen sechseckigen Konfigurationen noch immer optimal?

Kehren wir zu der Suche nach der Menge  $\mathcal{C}_{\min}$  zurück, die bei der Betrachtung der quadratischen Energie optimal ist (siehe Definition 1.2).

Aus der Arbeit von Temesvári [16] folgt, dass die Margerite  $\mathbf{x}_{\text{hex}}(2)$  die einzige Konfiguration unter *allen* Konfigurationen mit  $n(2) = 7$  Kreisscheiben ist, die die quadratische Energie minimiert: für  $n = 7$  gilt  $\mathcal{C}_{\min} = \{\mathbf{x}_{\text{hex}}(2)\}$ . Aber was ist mit der sechseckigen Konfiguration der Seitenlänge  $h = 3$ ? Ist sie optimal unter den Konfigurationen mit 19 Kreisscheiben? Und sind die anderen grösseren sechseckigen Konfigurationen auch optimal?

Wir beantworten diese Fragen in der unterstehenden Proposition. Die Antwort ist bejahend für hinreichend *kleine* Konfigurationen ( $h \leq 7$ ) und falls man für die Optimierung nur die gitterartigen Konfigurationen betrachtet. Für *grössere* sechseckige Konfigurationen ( $h \geq 8$ ) werden wir diese Aussage durch Gegenbeispiele widerlegen.

$h$	$n(h)$	$E(h)$	$h$	$n(h)$	$E(h)$
1	1	0	21	1261	882840
2	7	24	22	1387	1068144
3	19	192	23	1519	1281192
4	37	744	24	1657	1524624
5	61	2040	25	1801	1801200
6	91	4560	26	1951	2113800
7	127	8904	27	2107	2465424
8	169	15792	28	2269	2859192
9	217	26064	29	2437	3298344
10	271	40680	30	2611	3786240
11	331	60720	31	2791	4326360
12	397	87384	32	2977	4922304
13	469	121992	33	3169	5577792
14	547	165984	34	3367	6296664
15	631	220920	35	3571	7082880
16	721	288480	36	3781	7940520
17	817	370464	37	3997	8873784
18	919	468792	38	4219	9886992
19	1027	585504	39	4447	10984584
20	1141	722760	40	4681	12171120

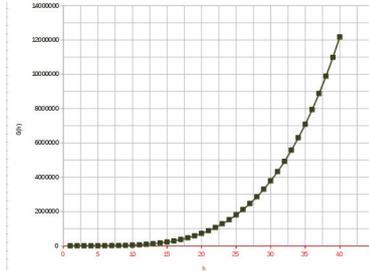


Tabelle 1 Die mittlere Energie der vierzig ersten sechseckigen Konfigurationen in Abhängigkeit der Seitenlänge des Sechsecks.

**Proposition 1.2.** *Unter den gitterartigen Konfigurationen ist die sechseckige Packung der Seitenlänge  $h$  optimal genau dann, wenn  $h \leq 7$ . In diesem Fall gilt*

$$E(h) = \min\{\mathcal{E}_{n(h)}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \text{ Konfiguration aus } n(h) \text{ Kreisscheiben mit } \mathbf{x} \subset \mathcal{T}\}.$$

Um diese Proposition zu beweisen, beweisen wir zuerst, dass eine sechseckige Packung  $\mathbf{x}_{\text{hex}}(h)$  (in einem noch zu erläuternden Sinn) genau dann kreisförmig ist, wenn sie klein genug ist, das heisst falls  $2 \leq h \leq 7$ . Anschliessend verwenden wir das mächtige Ergebnis von Chow, der bewiesen hat, dass die optimalen gitterförmigen Konfigurationen kreisförmig sind.

**Definition 1.4.** Eine gitterartige Konfiguration  $\mathbf{x} \subset \mathcal{T}$  wird kreisförmig genannt, falls ein Radius  $R > 0$  existiert, so dass alle Punkte auf dem dreieckigen Gitter  $\mathcal{T}$ , deren Abstand zum Gravitationszentrum  $\bar{x}$  kleiner oder gleich  $R$  ist, zu dieser gehören. Andersgesagt,  $\mathbf{x}$  ist kreisförmig falls  $\mathbf{x} = \{x_i \in \mathcal{T}, |x_i - \bar{x}| \leq R\}$ .

**Lemma 1.1.** *Die sechseckige Konfiguration der Seitenlänge  $h$  ist kreisförmig genau dann, wenn  $h \leq 7$ .*

*Beweis.* Jede sechseckige Konfiguration ist gitterartig:  $\mathbf{x}_{\text{hex}}(h) \subset \mathcal{T}$ . Sei  $x_1 = \bar{x} = 0$ . Der Radius der kleinsten Kugel mit Zentrum  $\bar{x} = 0$ , der alle Punkte  $x_2, \dots, x_{n(h)}$  umschliesst,

ist  $2(h - 1)$ . Daraus folgt, dass  $\mathbf{x}_{\text{hex}}(h)$  eine kreisförmige Konfiguration ist genau dann, wenn  $\mathbf{x}_{\text{hex}}(h) = B(0, 2(h - 1)) \cap \mathcal{T}$ . Wir unterscheiden zwei Fälle.

- (i) *h ist gerade*: Falls  $B(0, 2(h - 1)) \cap \mathcal{T} \setminus \mathbf{x}_{\text{hex}}(h) \neq \emptyset$  befindet sich der Punkt  $(0, h\sqrt{3})$  in der Kugel  $B(0, 2(h - 1))$ , siehe Abbildung 13. Aber

$$|(0, h\sqrt{3})| \leq 2(h - 1) \Leftrightarrow h \geq \frac{2}{2 - \sqrt{3}} \approx 7,46.$$

Daraus folgt, dass  $h$  mindestens 8 sein muss.

- (ii) *h ist ungerade*: Falls  $B(0, 2(h - 1)) \cap \mathcal{T} \setminus \mathbf{x}_{\text{hex}}(h) \neq \emptyset$  befindet sich der Punkt  $(1, h\sqrt{3})$  in der Kugel  $B(0, 2(h - 1))$ . Aber

$$|(1, h\sqrt{3})| \leq 2(h - 1) \Leftrightarrow h \geq 4 + \sqrt{13} \approx 7,6.$$

Dies bedeutet, dass  $h$  mindestens 9 sein muss.  $\square$

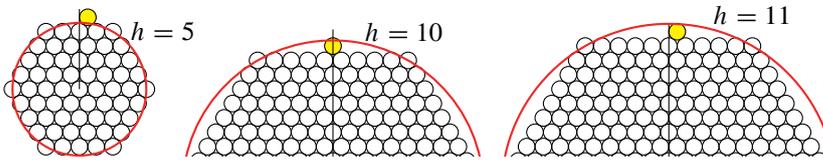


Abbildung 13 Kreisförmige bzw. nicht kreisförmige Konfigurationen.

Um den Beweis der Proposition 1.2 abzuschliessen, verwenden wir die Charakterisierung der optimalen gitterartigen Packung, die von Chow in der Proposition 3 des Artikels [3] bewiesen wurde. Diese sind kreisförmig (auf englisch: *Circular cluster*). Daraus folgt, dass für  $2 \leq h \leq 7$  die sechseckigen Packungen kreisförmig und somit optimal unter der gitterartigen Packungen sind.

Für  $h \geq 8$ , zeigt der konstruktive Beweis des Lemmas 1.1, dass die Konfiguration, die man durch das Verschieben der Kreisscheiben aus den Ecken in die Mitte der äusseren Seiten des Sechsecks abrundet, eine kleinere Energie als das Sechseck hat. Die optimale(n) Konfiguration(en) der Kardinalität  $n(h)$  kann/können also nicht die sechseckigen sein.

**Bilanz.** Wenn  $\mathbf{x}_{\text{hex}}(h)$  aber nicht optimal ist für  $h$  grösser als 7, was ist dann die optimale Gestalt für grosse Konfigurationen, die aus  $n > n(7) = 127$  Kreisscheiben bestehen?

Diese Frage ist bis jetzt nicht vollständig beantwortet und war Ursprung vieler Vermutungen. Unter anderen stellen Graham und Sloane in [11] drei unterschiedliche Methoden vor, wie man den Energiezuwachs, der durch das Hinzufügen einer Scheibe entsteht, minimieren kann. Chow [3] entwickelte dann einen teilweise zufälligen Algorithmus, der nach einer stetigen Gleichverteilung unter mehreren Möglichkeiten zufällig die Stelle auswählt, an der eine neue Kreisscheibe der vorherigen Schicht hinzugefügt wird.

All diese raffinierten Versuche sind jedoch beschränkt durch die Konstruktion von gitterartigen Konfigurationen. Da es heute unmöglich erscheint, einen Algorithmus zu finden, der optimale, nicht gitterartige Konfigurationen generiert, stellen wir im zweiten Teil dieses Artikels eine grundsätzlich andere Herangehensweise vor, nämlich einen wahrscheinlichkeitstheoretischen Zugang.

## 2 Zufällige Dynamik der Kreisscheiben und ihr Gleichgewichtszustand

In diesem Teil werden wir die optimalen Konfigurationen von Kreisscheiben beliebiger Grösse – die typischerweise nicht sechseckig sind – durch eine zufällige Dynamik der Kreisscheiben approximieren. Nach langer Zeit findet diese komplexe Bewegung einen Gleichgewichtszustand in einer Konfiguration, die nahe einer Konfiguration der minimalen Energie ist. Diese in [2] eingeführte Methode befreit uns somit vom Zwang der den vorherigen quasi-deterministischen Methoden inhärenten gitterartigen Geometrie.

### 2.1 Zufällige Bewegung von sich gegenseitig anziehenden Kreisscheiben

Wir betrachten  $n$  Kreisscheiben (für  $n$  gross genug). Jede Kreisscheibe oszilliert zufällig und chaotisch in der Ebene, unabhängig von den anderen  $(n - 1)$  Kreisscheiben. Diese üben allerdings eine Anziehungskraft auf sie aus. Wenn ausserdem zwei Kreisscheiben zusammenstossen, stossen sie sich nach den gebräuchlichen Gesetzen der Physik einer elastischen Kollision wieder ab, da sie sich nicht überschneiden können. Jede der  $n$  Kreisscheiben  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^2$  wird sich demnach in Abhängigkeit der Zeit  $t$  entlang einer gewissen, zufälligen Bahn in der Ebene bewegen. Genauer gesagt, werden die Funktionen  $t \mapsto x_i(t)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , das folgende System von stochastischen Integralgleichungen erfüllen:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} x_i(t) = \underbrace{\widetilde{x}_i(0)}_{\text{Anfangsposition}} + \underbrace{\widetilde{W}_i(t)}_{\text{Oszillation}} + \underbrace{a \int_0^t \sum_{j=1}^n (x_j(s) - x_i(s)) ds}_{\text{Anziehungskraft der anderen Kreisscheiben}} \\ \quad + \underbrace{\sum_{j=1}^n \int_0^t (x_i(s) - x_j(s)) dL_{ij}(s)}_{\text{durch Zusammenstösse bedingte Abstossung}} , \\ L_{ij}(0) = 0, \quad L_{ij} \equiv L_{ji}, \quad L_{ii} \equiv 0, \quad \text{und} \quad \int_0^t \mathbb{1}_{|x_i(s) - x_j(s)| \neq 2} dL_{ij}(s) = 0, \\ \text{für jedes } i \in \{1, \dots, n\} \text{ und } t \geq 0. \end{array} \right.$$

Wir betrachten nun die Bedeutung der vier obenstehenden Terme.

#### 2.1.1 Anfangsposition

Die Position der  $n$  Kreisscheiben zum Zeitpunkt 0 ist durch die ihrer Zentren gegeben, die für alle Paare  $i \neq j$  die Bedingung  $|x_i(0) - x_j(0)| \geq 2$  erfüllen. Sie bilden die Ausgangskonfiguration  $\mathbf{x}(0)$ .

#### 2.1.2 Zufällige Brownsche Oszillation

Die Oszillation, die jede Kreisscheibe im Verlauf der Zeit macht, ist eine zufällige Bewegung, genannt *Brownsche* Bewegung. Sie wurde nach dem Botaniker R. Brown benannt,

der 1828 in seinem Mikroskop eine unregelmässige, allgegenwärtige Bewegung von Pollenkörnern in einer Flüssigkeit entdeckte, die aber keine Lebenserscheinung war. Erst sehr viel später wurde diese Bewegung durch Einstein, Smoluchowsky und schliesslich Wiener mathematisch beschrieben. (Die Bezeichnung der Bewegung durch den Buchstaben  $W$  geht auf ihn zurück.) Zu jedem Zeitpunkt verändert jede Kreisscheibe spontan die Richtung ihrer Bewegung, ohne eine bestimmte zu bevorzugen und unabhängig von den anderen Kreisscheiben. Daraus folgt, dass ihre Geschwindigkeit de facto unendlich ist und ihre Bahn eine fraktale Funktion ist, die nirgendwo differenzierbar ist (siehe Abbildung 14).

5. *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen;*  
von A. Einstein.

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß nach der molekularkinetischen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten suspendierte Körper von mikroskopisch sichtbarer Größe infolge der Molekularbewegung der Wärme Bewegungen von solcher Größe ausführen müssen, daß diese Bewegungen leicht mit dem Mikroskop nachgewiesen werden können. Es ist möglich, daß die hier zu behandelnden Bewegungen mit der sogenannten „Brownischen Molekularbewegung“ identisch sind; die mir erreichbaren Angaben über letztere sind jedoch so ungenau, daß ich mir hierüber kein Urteil bilden konnte.

Wenn sich die hier zu behandelnde Bewegung samt den für sie zu erwartenden Gesetzmässigkeiten wirklich beobachten läßt, so ist die klassische Thermodynamik schon für mikroskopisch unterscheidbare Räume nicht mehr als genau gültig anzusehen und es ist dann eine exakte Bestimmung der wahren Atomgröße möglich. Erwies sich umgekehrt die Voraussage dieser Bewegung als unzutreffend, so wäre damit ein schwerwiegendes Argument gegen die molekularkinetische Auffassung der Wärme gegeben.

§ 1. *Über den suspendierten Teilchen zuzuschreibenden osmotischen Druck.*

Im Teilvolumen  $V^*$  einer Flüssigkeit vom Gesamtvolumen  $V$  seien  $z$ -Gramm-Moleküle eines Nichtelektrolyten gelöst. Ist das Volumen  $V^*$  durch eine für das Lösungsmittel, nicht aber für die gelöste Substanz durchlässige Wand vom reinen Lösungs-

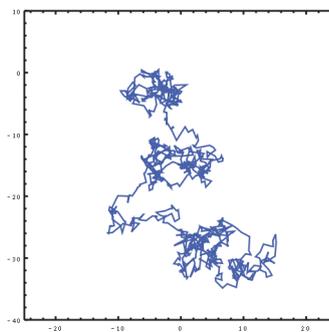


Abbildung 14 Links: Ausschnitt aus dem Artikel von A. Einstein über die Brownsche Bewegung (1905).  
Rechts: Eine Simulation einer möglichen Bahn eines Brownschen Teilchens in der Ebene

### 2.1.3 Anziehungskraft zwischen den Kreisscheiben

Zu jedem Zeitpunkt  $s$  wird die Scheibe  $i$  durch die anderen Kreisscheiben  $j$  angezogen, mit einer zu dem Vektor  $x_j(s) - x_i(s)$ , der die relative Position der beiden Kreisscheiben darstellt, proportionalen Kraft (siehe Figur 15). Der Proportionalitätskoeffizient  $a$  wird Anziehungskoeffizient genannt. Im Folgenden wird er eine wichtige Rolle spielen.

### 2.1.4 Auswirkung der Zusammenstöße der Kreisscheiben

Falls eine Kreisscheibe  $i$  sich einer Kreisscheibe  $j$  nähert und diese zu einem Zeitpunkt  $s$  berührt,  $|x_i(s) - x_j(s)| = 2$ , wird sie sofort zurückgestossen, da sich die Kreisscheiben nicht überschneiden dürfen. Diese Rückstosskraft, die den Gesetzen der elastischen Kollision folgt, ist kollinear zu dem Vektor  $x_i(s) - x_j(s)$  (in blau in der Abbildung 15).

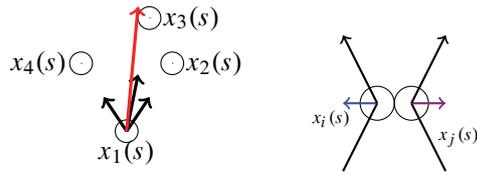


Abbildung 15 Links: Die durch die Kreisscheiben  $x_2(s)$ ,  $x_3(s)$  und  $x_4(s)$  auf  $x_1(s)$  ausgeübten Anziehungskräfte; in Rot ihre Summe. Rechts: Die Bewegung von  $x_i(s)$  und  $x_j(s)$  kurz vor und kurz nach den Zusammenstoss. In Blau, die Kraft der elastischen Kollision, die  $x_i(s)$  von  $x_j(s)$  entfernt.

Sie wird global dargestellt durch den additiven Term  $\int_0^t (x_i(s) - x_j(s)) dL_{ij}(s)$ . Ihre Intensität hängt von der Anzahl und den (zufälligen) Zeitpunkten der Zusammenstöße zwischen  $i$  und  $j$  ab. Dies rechtfertigt, dass der Integrand ein wachsender, zufälliger Prozess ist, den wir mit  $L_{ij}(t)$  bezeichnen und der *lokale Zeit des Zusammenstosses* genannt wird. Letztere wächst nur, falls sich die zwei Kreisscheiben  $i$  und  $j$  berühren:

$$\int_0^t \mathbb{1}_{|x_i(s) - x_j(s)| \neq 2} dL_{ij}(s) = 0.$$

Die Anfangsbedingung  $L_{ij}(0) = 0$  ist beliebig.

Die Symmetrie  $L_{ij} \equiv L_{ji}$  liegt in der Natur des Problems. Ein Zusammenstoss zwischen  $x_i$  und  $x_j$  hat einen symmetrischen Einfluss auf das Verhalten von  $x_i$  und  $x_j$ . (In Abbildung 15 sind der blaue und der rosa Pfeil entgegengesetzt.) Da ein Partikel nicht mit sich selbst zusammenstossen kann, gilt  $L_{ii} \equiv 0$ .

Die Existenz einer mathematischen Lösung des Systemes (\*) ist kein einfaches Problem auf Grund der lokalen Zeiten des Zusammenstosses, die selbst Unbekannte sind. Der erste Beweis der Existenz einer solchen Dynamik mit  $n$  Kugeln ohne gegenseitige Anziehungskraft ( $a = 0$ ) wurde von Saisho und Tanaka in [13] 1986 gegeben. Die Autorinnen M.F. und S.R. haben diese Methode verbessert und erweitert, um so auch den Fall eines unendlichen Systems mit allgemeiner Interaktion behandeln zu können, siehe [9].

## 2.2 Stabilisierung gegen quasi-optimalen Packungen

Die Dynamik (\*) ist in vielerlei Hinsicht bemerkenswert. Wir bemerken zuerst, dass die augenblickliche Anziehungskraft zwischen Kreisscheiben (bis auf einen Koeffizienten) als Ableitung der quadratischen Energie gesehen werden kann, da

$$a \sum_{j=1}^n (x_j - x_i) = -\frac{na}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{E}_n(\mathbf{x}).$$

Die Dynamik (\*) ist somit eine sogenannte *Gradienten-Dynamik*, von der man bestimmte zeitabhängige Eigenschaften kennt. Insbesondere hat die zweite Autorin in Theorem 3.3 von [7] bewiesen, dass, durch das Festlegen von zufälligen Ausgangspositionen  $x_1(0), \dots$ ,

$x_n(0)$  durch eine geeignete Verteilung  $\mu_a$ , die Bewegung der Kreisscheiben ein stationäres Verhalten zeigt; das heisst, dass ihre Verteilung zu jedem Zeitpunkt die gleiche bleibt. Tatsächlich entspricht  $\mu_a$  dem gleichmässigen Mass der Menge der Konfigurationen von  $n$  Kreisscheiben, durch den *Dichtefaktor*  $\exp(-na \mathcal{E}_n(\mathbf{x}))$  verzerrt. In anderen Worten: Die zufällige Position der Kreisscheiben der Verteilung  $\mu_a$  ist ein Gleichgewichtszustand der Dynamik (\*).

Nun stellen sich uns zwei Fragen, die mit dem Zeitparameter  $t$  und mit der Anziehungskraft  $a$  verbunden sind.

- Können wir davon ausgehen, dass, wenn wir die Anfangspositionen der Kreisscheiben deterministisch festlegen  $\mathbf{x}(0) = \{x_1(0), \dots, x_n(0)\}$ , das System nach einer langen Zeit  $t$  den oben beschriebenen Gleichgewichtszustand annimmt? Anders gesagt, gibt es eine Stabilisierung der zufälligen Dynamik der Kreisscheiben zu der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\mu_a$ ?
- Die für die Verteilung  $\mu_a$  wahrscheinlichsten Konfigurationen  $\mathbf{x}$  sind diejenigen, für die die Dichte  $e^{-na \mathcal{E}_n(\mathbf{x})}$  maximal ist, das heisst sie sind Elemente von  $\mathcal{C}_{\min}$  mit einer minimalen Energie  $\mathcal{E}_n(\mathbf{x})$ . Können wir davon ausgehen, dass wir die Konfigurationen von  $\mathcal{C}_{\min}$  erreichen, in dem wir den Anziehungskoeffizienten erhöhen, so dass die Wahrscheinlichkeit jeder suboptimalen Konfiguration vernachlässigbar wird?

Wir beantworten beide Fragen positiv:

Wir legen eine beliebige anfängliche Konfiguration eines Systems mit  $n$  Kreisscheiben fest. Wir können dann einen ausreichend grossen Anziehungskoeffizienten  $a$  wählen, so dass nach der Evolution während ausreichend langer Zeit gemäss der Dynamik (\*) sich das System mit einer beliebig grossen Wahrscheinlichkeit in einer Konfiguration befindet, die beliebig nahe an den optimalen Konfigurationen ist. Dies wird wie folgt formalisiert. Der Abstand  $\mathbf{d}$ , der dort vorkommt, wird durch den Unterschied zwischen der Energie der Konfiguration  $\mathbf{x}(t)$  und der minimalen Energie gegeben.

**Satz 2.1.** *Sei  $\mathbf{x}(0)$  eine beliebige Anfangskonfiguration. Für alle  $\varepsilon, \eta > 0$  existiert ein  $A > 0$  und ein  $T > 0$ , so dass für alle  $a > A$  und  $t > T$ ,*

$$\mathbb{P}(\exists \mathbf{x}_{\min} \in \mathcal{C}_{\min}, \mathbf{d}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_{\min}) \leq \eta) \geq 1 - \varepsilon.$$

*Beweis.* Wir erweitern die Menge  $\mathcal{C}_{\min}$  ein wenig, in dem wir auch  $\eta$ -optimale Konfigurationen zulassen:  $\mathcal{C}_{\min}^\eta := \{\mathbf{x} ; \mathcal{E}_n(\mathbf{x}) \leq \underline{\mathcal{E}}_n + \eta\}$  wobei  $\underline{\mathcal{E}}_n := \mathcal{E}_n(\mathbf{x}_{\min})$ .

$$\begin{aligned} \mu_a((\mathcal{C}_{\min}^\eta)^c) &= \frac{\int e^{-\frac{a}{2} \mathcal{E}_n(\mathbf{x})} \mathbb{1}_{\mathcal{E}_n(\mathbf{x}) > \underline{\mathcal{E}}_n + \eta} d\mathbf{x}}{\int e^{-\frac{a}{2} n \mathcal{E}_n(\mathbf{x})} d\mathbf{x}} \leq \frac{\int e^{-\frac{a}{2} (\mathcal{E}_n(\mathbf{x}) - \underline{\mathcal{E}}_n - \eta)} \mathbb{1}_{\mathcal{E}_n(\mathbf{x}) > \underline{\mathcal{E}}_n + \eta} d\mathbf{x}}{\int e^{-\frac{a}{2} (\mathcal{E}_n(\mathbf{x}) - \underline{\mathcal{E}}_n - \eta)} \mathbb{1}_{\mathcal{E}_n(\mathbf{x}) \leq \underline{\mathcal{E}}_n + \eta} d\mathbf{x}} \\ &\leq \frac{1}{\int \mathbb{1}_{\mathcal{E}_n(\mathbf{x}) \leq \underline{\mathcal{E}}_n + \eta} d\mathbf{x}} \int e^{-\frac{a}{2} (\mathcal{E}_n(\mathbf{x}) - \underline{\mathcal{E}}_n - \eta)} \mathbb{1}_{\mathcal{E}_n(\mathbf{x}) > \underline{\mathcal{E}}_n + \eta} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Dies geht nach 0 wenn  $a$  nach unendlich geht. Daraus folgt, dass für ein ausreichend grosses  $a$  die Wahrscheinlichkeit von  $\mathcal{C}_{\min}^\eta$  unter  $\mu_a$  sich 1 mehr und mehr nähert.

Andererseits konvergiert für eine Anfangsposition  $\mathbf{x}(0)$  und für jede festgelegte Anziehungskraft  $a$  die Verteilung des Systems von  $n$  Kreisscheiben zur Zeit  $t$  gegen  $\mu_a$ , wenn  $t$  gegen unendlich geht. Diese intuitive (aber sehr schwierig zu beweisende) Stabilisierung wurde in [2] für  $n = 3$  Kreisscheiben gezeigt. Die Verallgemeinerung für eine beliebige Anzahl  $n$  von Kreisscheiben ist das Thema des Artikels [10], der gerade von den Autorinnen M.F. und S.R. geschrieben wird. Es gilt also

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\mathbf{x}(t) \in \mathcal{C}_{\min}^\eta) = \mu_a(\mathcal{C}_{\min}^\eta).$$

Man erhält das endgültige Resultat in dem man die Stetigkeit der Energie verwendet. Diese impliziert, dass die Menge  $\mathcal{C}_{\min}^\eta$  der  $\eta$ -optimalen Konfigurationen sich  $\mathcal{C}_{\min}$  nähert, wenn  $\eta$  nach 0 geht.  $\square$

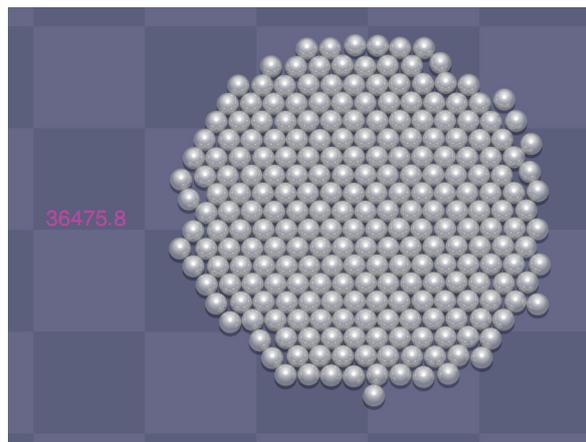


Abbildung 16 Form einer fast-optimalen Konfiguration aus  $n = 250$  Kreisscheiben

Der\*Die Leser\*in, der\*die an der dynamischen Visualisierung der Konvergenz interessiert ist, ist eingeladen, die Webseite

[http://mfradon.plil.fr/penny\\_packing\\_simulation.html](http://mfradon.plil.fr/penny_packing_simulation.html)

zu besuchen, auf der Simulationen unsere Ergebnisse illustrieren.

**Danksagung.** Die erste Autorin absolvierte im Mai und Juni 2016 ein Praktikum im mathematischen Institut Paul Painlevé der Université de Lille im Rahmen des Studienvorbereitungs- und Orientierungsjahres ProTechnicale. Einige der vorgestellten Resultate dieses Artikels sind die Ergebnisse dieses Praktikums. Der Forschungsgruppe für Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik wird an dieser Stelle für den herzlichen Empfang gedankt.

## Literatur

- [1] K. Böröczky: Finite packing and covering. *Cambridge tracts in mathematics* 154, Cambridge University Press (2004).
- [2] P. Cattiaux, M. Fradon, A.M. Kulik und S. Rœlly: Longtime behaviour of stochastic hard ball systems. *Bernoulli* **22-2** (2016), 681–710

- [3] T.Y. Chow: Penny-packings with minimal second moments. *Combinatorica* **15** (1995), 151–158.
- [4] J.H. Conway und N.J.A. Sloane: Sphere Packings, Lattices and Groups *Grundlehren der math. Wiss.* 290, Springer-Verlag, Berlin-New-York third ed. (1993).
- [5] J.H. Conway und N.J.A. Sloane: A fast encoding method for lattice codes and quantizers. *IEEE Transactions on Information Theory* **29-6** (1983), 820–824.
- [6] P. Diaconis, G. Lebeau und L. Michel: Geometric analysis for the Metropolis Algorithm on Lipschitz Domains. *Inventiones mathematicae* **185** (2011), 239–281.
- [7] M. Fradon: Brownian dynamics of globules. *Electronic Journal of Probability* **15-6** (2010), 142–161.
- [8] M. Fradon und S. Rœlly: Infinitely many Brownian globules with Brownian radii. *Stochastics and Dynamics* **10-4** (2010), 591–612.
- [9] M. Fradon und S. Rœlly: Infinite system of Brownian balls with interaction: the non-reversible case. *ESAIM: Probability and Statistics* **11** (2007), 55–79.
- [10] M. Fradon und S. Rœlly: Brownian dynamics as approximation of the finite packing problem. *Wird zurzeit verfasst* (2018).
- [11] R.L. Graham und N.J.A. Sloane: Penny-packing and two-dimensional codes. *Discrete and Computational Geometry* **5** (1990), 1–11.
- [12] J. Karout, E. Agrell, K. Szczerba und M. Karlsson: Optimizing constellations for single-subcarrier intensity-modulated optical systems. *IEEE Transactions on Information Theory* **58-7** (2012), 4645–4659.
- [13] Y. Saisho und H. Tanaka: Stochastic Differential Equations for Mutually Reflecting Brownian Balls. *Osaka Journal of Mathematics* **23** (1986), 725–740.
- [14] N.J.A. Sloane, R.H. Hardin, T.D.S. Duff und J.H. Conway: Minimal-Energy Clusters of Hard Spheres. *Discrete and Computational Geometry* **14** (1995), 237–259.
- [15] N.J.A. Sloane und B.K. Teo: Theta series and magic numbers for close-packed spherical clusters. *Journal of Chemical Physics* **83** (1985), 6520–6534.
- [16] A. H. Temesvári: Távolságok hatványösszegének extrémumáról. (Über die extremalen Werten der Summe Abstandpotenzen.) *Matematikai Lapok* **25** (1974), 329–342 (in ungarischer Sprache).

Charlotte Dombrowsky  
ETH Zürich  
Rämistrasse 101  
CH-8092 Zürich, Schweiz  
e-mail: ch.dombrowsky@gmx.de

Myriam Fradon  
U.F.R. de Mathématiques  
CNRS UMR 8524  
Université Lille 1  
F-59655 Villeneuve d’Ascq Cedex, France  
e-mail: Myriam.Fradon@univ-lille1.fr

Sylvie Rœlly  
Institut für Mathematik der Universität Potsdam  
Karl-Liebknecht-Str. 24–25  
D-14476 Potsdam OT Golm, Deutschland  
e-mail: roelly@math.uni-potsdam.de

---

---

## Parallelograms inscribed in a pair of confocal ellipses

---

---

Dorota Blinkiewicz, Piotr Rzonsowski and Bogdan Szydło

Dorota Blinkiewicz obtained her Ph.D. from Adam Mickiewicz University (Poznań) in 2017. Her research interests include i.a. number theory and arithmetic algebraic geometry.

Piotr Rzonsowski obtained his Ph.D. from Adam Mickiewicz University (Poznań) in 2010. The area of his research is mainly arithmetic geometry.

Bogdan Szydło obtained his Ph.D. from Adam Mickiewicz University (Poznań) in 1988. His main interests are in geometry and number theory.

### 1 Introduction

The following particular but interesting maximal property of confocal ellipses was proved by A. Connes and D. Zagier [4, Theorem 2]; see Figure 1.

**Theorem.** *Let  $\mathcal{E}$  and  $\mathcal{E}'$  be a pair of confocal ellipses with foci  $F$  and  $G$ . Let  $O$  be a centre of the ellipses,  $a$  and  $b$  semiaxes of  $\mathcal{E}$ ,  $a \geq b > 0$ ,  $a'$  and  $b'$  semiaxes of  $\mathcal{E}'$ ,  $a' \geq b' > 0$ ,  $c = OF = OG \geq 0$ . Then from the confocality of  $\mathcal{E}$  and  $\mathcal{E}'$  it follows that  $a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2 = c^2$  and also  $a^2 + b'^2 = a'^2 + b^2 = c^2 + b^2 + b'^2$ . Let  $AC$  be any diameter of the ellipse  $\mathcal{E}$  ( $A, C \in \mathcal{E}$ ). Then there exists a unique diameter  $BD$  of the ellipse  $\mathcal{E}'$  ( $B, D \in \mathcal{E}'$ ) such that the perimeter  $p(AC, BD) = AD + DC + CB + BA = 2(AD + DC) = 2(AB + BC)$  of the parallelogram  $ABCD$  reaches its maximum value*

Alain Connes und Don Zagier machten 2007 bei einem Paar konfokaler Ellipsen  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{E}'$  folgende bemerkenswerte Beobachtung: Wählt man einen beliebigen Durchmesser  $AC$  von  $\mathcal{E}$ , so existiert ein eindeutiger Durchmesser  $BD$  von  $\mathcal{E}'$ , so dass das Parallelogramm  $ABCD$  maximalen Umfang besitzt, und der Wert dieses Umfangs ist unabhängig von  $AC$ . Den Fall  $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$  hat Michel Chasles bereits 1843 betrachtet. Die Problemstellung hat Bezüge zur Theorie der Billardbahnen in Ellipsen und zum Schliessungssatz von Poncelet. In der vorliegenden Arbeit wird der oben genannte Satz auf elementare Weise bewiesen, indem nur die Grundeigenschaften der Ellipse verwendet werden. Dabei ergeben sich weitere interessante Resultate, wie das Coxeter–Greitzer Lemma und eine Verallgemeinerung eines klassischen Satzes von Monge.

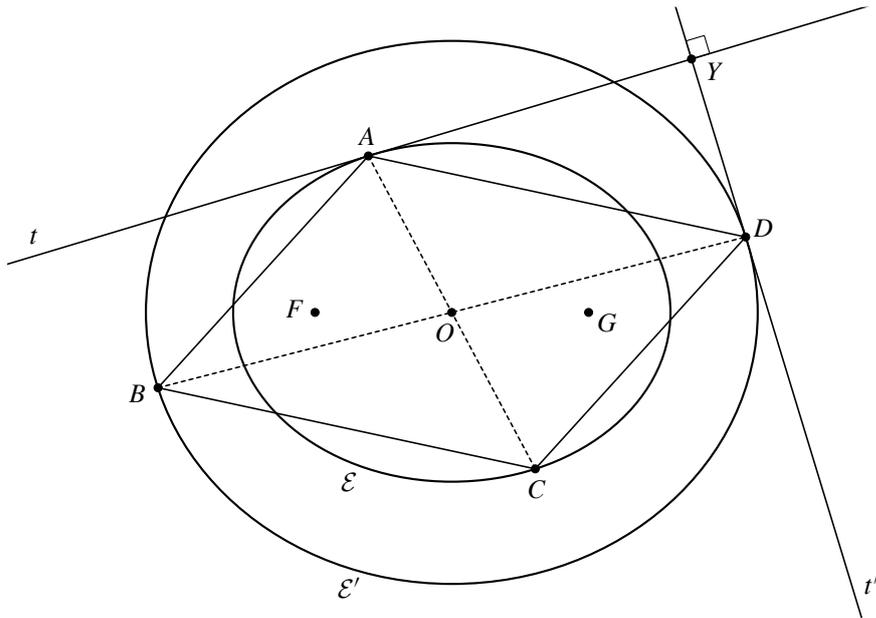


Figure 1 The parallelogram  $ABCD$  of maximal perimeter inscribed in a pair of confocal ellipses.

$p_{AC}$ . Moreover, the value of the maximal perimeter  $p_{AC}$  is independent of  $AC$  and is equal to  $p$  with

$$p = 4\sqrt{a^2 + b^2} = 4\sqrt{a'^2 + b^2} = 4\sqrt{c^2 + b^2 + b^2}.$$

Their proof of the above theorem is analytic and elementary, but in fact they establish the following clear *Geometric Criterion* for the maximal-perimeter property of a parallelogram  $ABCD$  (see Figure 1):

*The tangent  $t$  of  $\mathcal{E}$  at  $A$  (or  $C$ ) is perpendicular  
to the tangent  $t'$  of  $\mathcal{E}'$  at  $B$  (or  $D$ ).*

Compare the condition (3) in [4, p. 911] and (14) in Section 5. Incidentally, let us notice that the formula for  $\|P \pm P'\|$  at the bottom of p. 911 of [4] is incorrect. In the notation of [4] it should be replaced by

$$\|P \pm P'\| = \sqrt{C} \left( 1 \pm \frac{\lambda - \mu}{\lambda\lambda'} xx' \right).$$

For a single ellipse  $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$  A. Connes and D. Zagier presented also a quite different and geometric proof of the result; see [4, Theorem 1]. Their argument involves Pascal's theorem from projective geometry which combined with basic metrical properties of an ellipse (i.e., the focal and optical ones, cf. Section 2) results in that the above-stated *Geometric Criterion* holds; see [4, Lemma]. The perpendicularity of tangents in the *Geometric Cri-*

*terion* is in turn related to the Monge circle of an ellipse; cf. Section 4. Another proof of the Theorem for a single ellipse, using projective arguments, was given by M. Berger [2] and analytic ones by J.-M. Richard [8]. As it is sketched in [4] by A. Connes and D. Zagier, the Theorem can be generalized and proved by considering  $2n$ -gons inscribed in a proper manner in  $n$  given confocal ellipses. This kind of generalization is connected with the theory of billiards and the Great Theorem of Poncelet; cf. [9].

Let us, however, observe that the Theorem describes the fine metric property of a pair of confocal ellipses. It then seems to be not out of interest to give a purely metric (i.e., using only Euclidean plane geometry) proof of it. The aim of this note is to give such a proof. The proof will be based only on the direct and straightforward applications of the standard tools of metric Euclidean plane geometry such as the laws of cosines and sines, etc., and the two main metric properties of an ellipse, namely the focal and optical ones.

## 2 Properties of an ellipse

Let  $\mathcal{E}$  be an ellipse with foci  $F$  and  $G$ ,  $O$  its centre,  $c = OF = OG$ ,  $2a$  its major axis,  $a > c \geq 0$ ,  $2b$  its minor axis. Let  $M \in \mathcal{E}$  and  $s$  be the tangent of  $\mathcal{E}$  at  $M$ , i.e.,  $s \cap \mathcal{E} = \{M\}$ . Denote by  $F'$  the point symmetric to  $F$  with respect to  $s$  and by  $\hat{F}$  the intersection of the straight lines  $FF'$  and  $s$ , so  $\hat{F}$  is the orthogonal projection of the focus  $F$  on the tangent  $s$ . Let  $AA'$  be the greatest diameter of  $\mathcal{E}$ . Under these assumptions we state the following Propositions 1–5; see Figure 2. We find all of them in *konika* by Apollonius from Perga; see [1, III.52, III.48, III.52, III.50, III.42], respectively.

**Proposition 1 (Focal property).**  $MF + MG = 2a$ .

**Proposition 2 (Optical property).** The radii  $FM$  and  $GM$  will make equal angles ( $= \alpha$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/2$ ) with the tangent  $s$ .

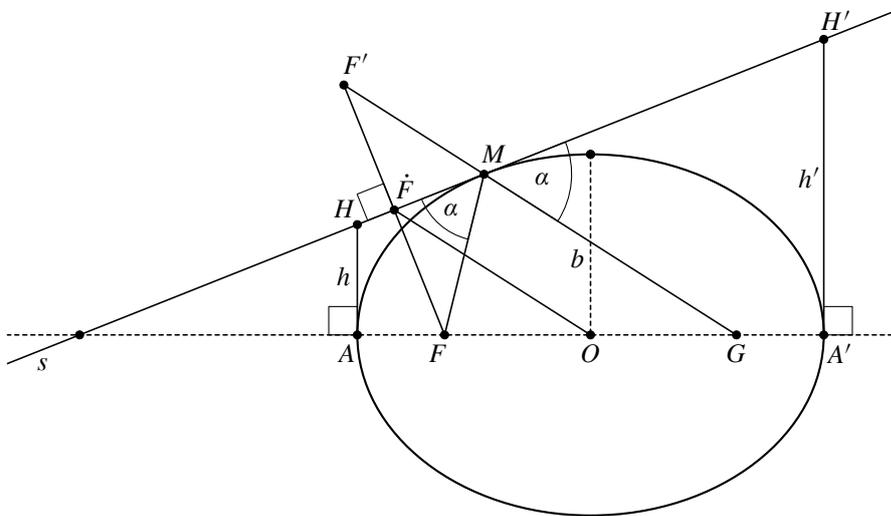


Figure 2 Properties of an ellipse.

**Proposition 3.**  $GF' = 2a$ .

**Proposition 4.**  $O\dot{F} = a$ .

**Proposition 5.** Let  $M \neq A, A'$ . Draw tangents of  $\mathcal{E}$  at  $A$  and  $A'$ . (They are perpendicular to the diameter  $AA'$ .) Denote by  $H$  and  $H'$  respective intersection points of these tangents with the tangent  $s$ . Let  $h = AH$ ,  $h' = A'H'$ . Then  $hh' = b^2$ .

**Remark 1.** The lines  $O\dot{F}$  and  $GF'$  in Figure 2 are parallel. This observation will be used later on in Section 5 in our geometric proof of the theorem.

### 3 Coxeter–Greitzer Lemma

**Proposition 6.** Let us suppose that a point  $Q$  lies outside a parallelogram  $P_1P_2P_3P_4$  ( $P_1P_2 > 0$ ,  $P_2P_3 > 0$ ) and the convex angle  $P_1QP_3$  is included in the convex angle  $P_2QP_4$ . We do not exclude a possibility that  $P_1P_2P_3P_4$  degenerates as a point set to a segment. Denote

$$\alpha := \angle P_1QP_4, \beta := \angle P_2QP_3, \gamma := \angle P_1P_2Q, \delta := \angle P_1P_4Q.$$

Let us assume that

$$\alpha = \beta > 0.$$

Then we have

$$\gamma = \delta > 0.$$

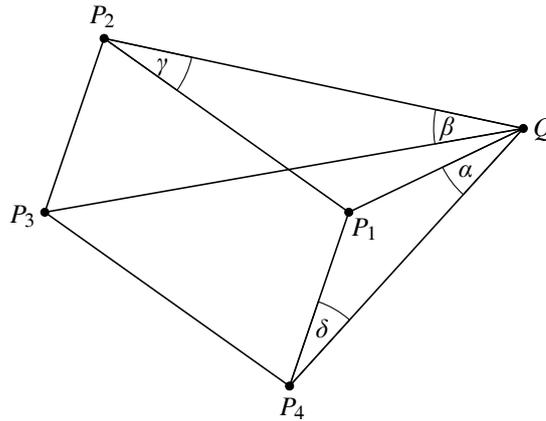


Figure 3 The Coxeter–Greitzer Lemma:  $\alpha = \beta > 0 \Rightarrow \gamma = \delta > 0$ .

**Remarks 2.** Proposition 6 states that the implication

$$\alpha = \beta > 0 \Rightarrow \gamma = \delta > 0 \tag{1}$$

is true. In their classic book [5] H.S.M. Coxeter and S.L. Greitzer presented the converse implication

$$\gamma = \delta > 0 \Rightarrow \alpha = \beta > 0 \tag{2}$$

as an exercise to be proved; see [5, pp. 25–26]. Interesting enough, they described (2) and a few other exercises as “well-known posers” and “hardy perennials”; see [5, p. 25]. A method of proof of (2) given in their book [5, pp. 158–159], attributed to D. Sokolowski, can also be used to prove (1), i.e., Proposition 6.

#### 4 Monge circle theorem for a pair of confocal ellipses

**Proposition 7.** *Let  $\mathcal{E}$  and  $\mathcal{E}'$  be a pair of confocal ellipses with foci  $F$  and  $G$ . Let  $O$  be a centre of the ellipses,  $a$  and  $b$  semiaxes of  $\mathcal{E}$ ,  $a \geq b > 0$ ,  $a'$  and  $b'$  semiaxes of  $\mathcal{E}'$ ,  $a' \geq b' > 0$ ,  $c = OF = OG \geq 0$ . Let  $t$  be a tangent of  $\mathcal{E}$  at  $T \in \mathcal{E}$  and  $t'$  be a tangent of  $\mathcal{E}'$  at  $T' \in \mathcal{E}'$ . Suppose that  $t$  is perpendicular to  $t'$ . Denote by  $Y$  their intersection point. Then*

$$OY^2 = b^2 + b'^2 + c^2.$$

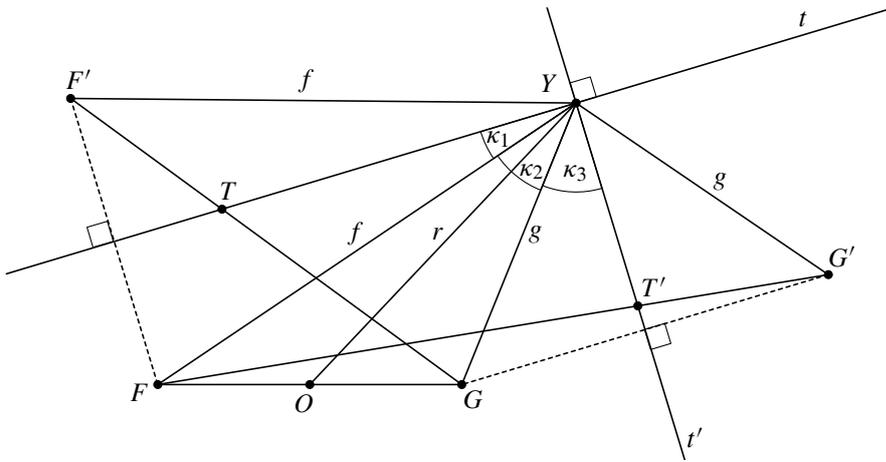


Figure 4 Proving the Monge circle theorem for a pair of confocal ellipses via the law of cosines.

*First Proof.* Denote

$$r := OY, f := FY, g := GY;$$

see Figure 4. The segment  $OY$  is a median of the triangle  $FYG$ . We have the parallelogram equation [7, VII.122]

$$r^2 = \frac{1}{2}(f^2 + g^2) - c^2. \tag{3}$$

Denote

$$\kappa_1 := \angle TYF, \kappa_2 := \angle FYG, \kappa_3 := \angle GYT'.$$

If necessary, make the change  $F \leftrightarrow G$  of the notations of the foci to rewrite our assumption about the perpendicularity of  $t$  and  $t'$  in the form

$$\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = \frac{\pi}{2}; \tag{4}$$

see Figure 4.

Reflect the focus  $F$  of  $\mathcal{E}$  at  $t$  to the point  $F'$  and the focus  $G$  of  $\mathcal{E}'$  at  $t'$  to  $G'$ . We have constructed the triangles  $F'YG$  and  $FYG'$ . In the triangle  $F'YG$  we have by construction

$$F'Y = FY = f, YG = g, \angle F'YG = 2\kappa_1 + \kappa_2$$

and also  $F'G = 2a$  by Proposition 3 applied to the ellipse  $\mathcal{E}$ . In the triangle  $FYG'$  we have by construction

$$FY = f, YG' = YG = g, \angle FYG' = \kappa_2 + 2\kappa_3$$

and  $FG' = 2a'$  by Proposition 3 applied to the ellipse  $\mathcal{E}'$ .

The law of cosines [6, II.12,13] applied to the triangles  $F'YG$  and  $FYG'$  gives

$$4a^2 = f^2 + g^2 - 2fg \cos(2\kappa_1 + \kappa_2) \quad (5)$$

and

$$4a'^2 = f^2 + g^2 - 2fg \cos(\kappa_2 + 2\kappa_3). \quad (6)$$

By (4),

$$\cos(2\kappa_1 + \kappa_2) + \cos(\kappa_2 + 2\kappa_3) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \kappa_1 - \kappa_3\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \kappa_1 + \kappa_3\right) = 0. \quad (7)$$

From (3), (5), (6) and (7) we get

$$OY^2 = r^2 = a^2 + a'^2 - c^2 = b^2 + b'^2 + c^2,$$

for the confocality of  $\mathcal{E}$  and  $\mathcal{E}'$  means in particular that  $a^2 = b^2 + c^2$ ,  $a'^2 = b'^2 + c^2$ .  $\square$

*Second Proof (Gerhard Wanner).* Let us resort to Cartesian analytic geometry and equip the plane with a rectangular coordinate system to the effect that the ellipses  $\mathcal{E}$  and  $\mathcal{E}'$  are defined by the equations  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  and  $x^2/a'^2 + y^2/b'^2 = 1$  respectively, i.e., the major and minor axes of  $\mathcal{E}$  and  $\mathcal{E}'$  become the  $x$ -axis and the  $y$ -axis of the introduced coordinate system. Let  $x_0$  and  $y_0$  be the coordinates of  $Y$ .

Consider a generic case of the location of tangents  $t$  and  $t'$  when neither  $t$  nor  $t'$  is parallel to the  $y$ -axis; cf. Figure 5. If  $p \neq 0$  is the slope of the line  $t$ , then the slope of the line  $t'$  is  $-1/p$ . Recalling that  $Y \in t \cap t'$ ,  $Y = (x_0, y_0)$  we can write down the equations of  $t$  and  $t'$  in the form

$$y = y_0 + p(x - x_0) \quad (8)$$

and

$$y = y_0 - \frac{1}{p}(x - x_0) \quad (9)$$

respectively.

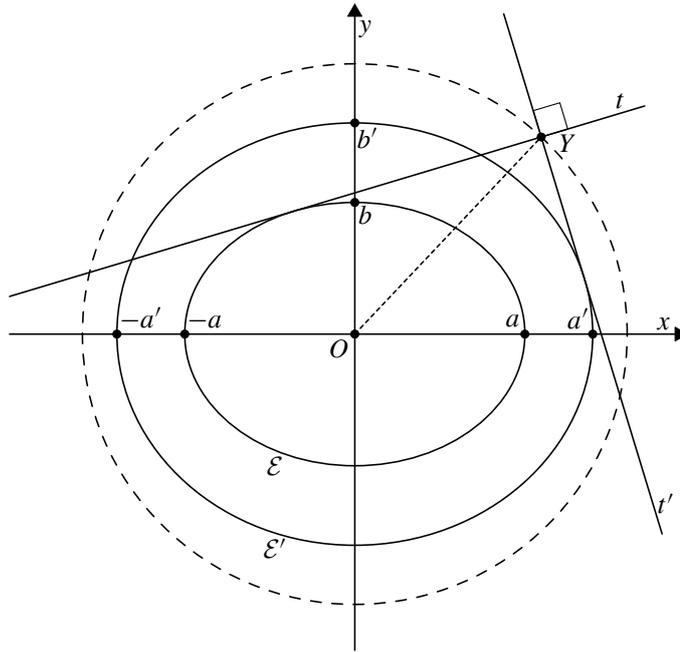


Figure 5 Monge circle theorem for a pair of confocal ellipses via Apollonius III.42.

Let us apply Proposition 5 to the ellipses  $\mathcal{E}$  and  $\mathcal{E}'$  and their tangents  $t$  and  $t'$ . By (8) and (9) we conclude that

$$(y_0 + p(-a - x_0))(y_0 + p(a - x_0)) = b^2 \quad (10)$$

and

$$\left(y_0 - \frac{1}{p}(-a' - x_0)\right)\left(y_0 - \frac{1}{p}(a' - x_0)\right) = b'^2. \quad (11)$$

On adding the equation (10) and the equation (11) premultiplied by  $p^2$  and arranging terms of the resulting equation we get

$$(1 + p^2)(x_0^2 + y_0^2) = a'^2 + b'^2 + p^2(a^2 + b^2).$$

Consequently,

$$\begin{aligned} OY^2 &= x_0^2 + y_0^2 \\ &= a^2 + b^2 + ((a'^2 + b'^2) - (a^2 + b^2))/(1 + p^2). \end{aligned} \quad (12)$$

By straightforward verification we can check that the nice formula (12), just established under the assumption  $p \in \mathbb{R}$ ,  $p \neq 0$ , is also true for  $p = 0$  and  $p = \pm\infty$  (on the understanding that  $1/(1 + (\pm\infty)^2) := 0$ ). The conclusion is that in all cases of the possible

location of  $t$  and  $t'$  (12) holds. Finally making use of the confocality condition  $a^2 + b'^2 = a'^2 + b^2$  we get from (12)

$$OY^2 = a^2 + b'^2 = a'^2 + b^2. \quad \square$$

**Remarks 3.** By Proposition 6 the locus of points from which one sees a pair of confocal ellipses at right angles is a circle. In the case of a single ellipse  $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$  this statement reduces to the classical theorem of G. Monge (1746–1818).

## 5 Geometric proof of the theorem

We assume that  $a' \geq a > 0$ . The case  $0 < a' < a$  can be treated similarly. Let us fix a diameter  $AC$  of  $\mathcal{E}$  and consider any parallelogram  $AKCL$ ,  $KL$  being a diameter of  $\mathcal{E}'$ ; see Figure 6. Then the segment  $KL$  is also a diameter of the ellipse  $\mathcal{E}''(KL)$  with foci  $A$  and  $C$  and, by the focal property (Proposition 1), the major axis equal to  $AL + LC = \frac{1}{2}p(AC, KL)$ , where  $p(AC, KL)$  is the perimeter of  $AKCL$ . By rotating the diameter  $KL$  of  $\mathcal{E}'$  about  $O$  we obtain a whole family of ellipses  $\mathcal{E}''(KL)$ . A typical ellipse  $\mathcal{E}''(KL)$  intersects  $\mathcal{E}'$  in four different points [1, IV]:  $K, L$  and  $M, N$ , say; see Figure 6.

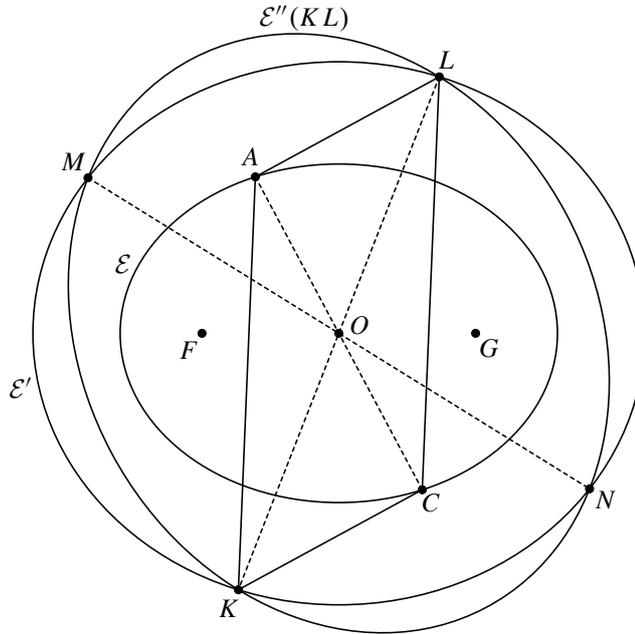


Figure 6 A parallelogram  $AKCL$  inscribed in  $\mathcal{E}$  and  $\mathcal{E}'$ .

The largest ellipse of this family is produced when the diameter  $KL$  of  $\mathcal{E}'$  is rotated to such a position  $KL := BD$  that  $p(AC, KL)$  reaches its maximum value  $p_{AC} = p(AC, BD) = 2(AD + DC)$ . Denote  $\tilde{\mathcal{E}} := \mathcal{E}''(BD)$ . The major axis of  $\tilde{\mathcal{E}}$  is equal to  $2\tilde{a} := (AD + DC) = \frac{1}{2}p_{AC}$ ; see Figure 7.

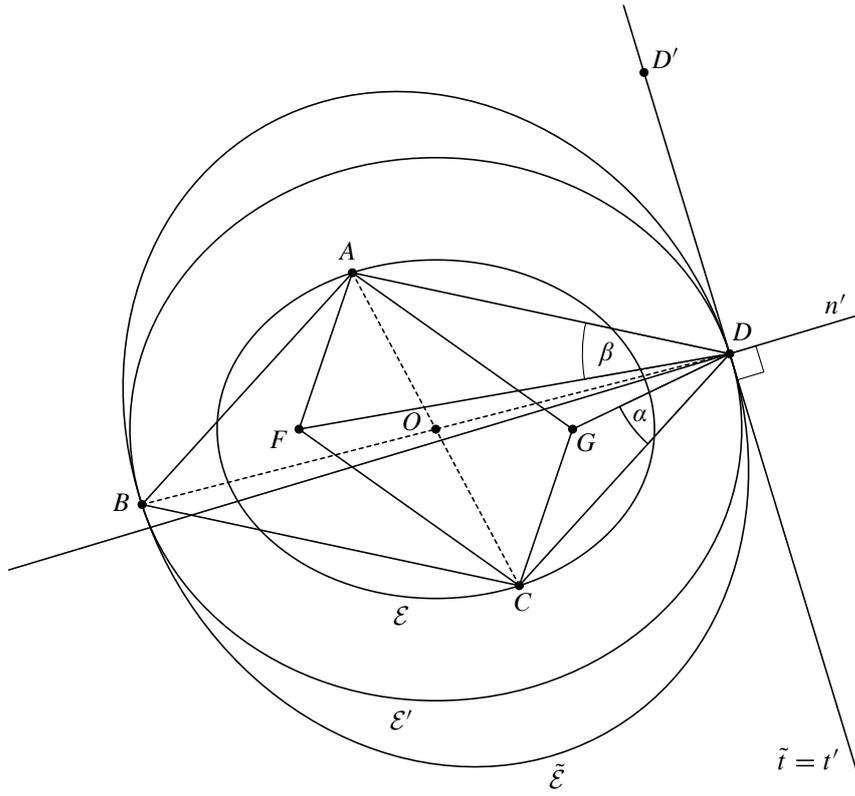


Figure 7 The parallelogram  $ABCD$  of the maximal perimeter  $p_{AC} = 2(AD + DC)$  and  $\alpha = \beta$ .

Now consider the tangent line  $\tilde{t}$  of  $\tilde{\mathcal{E}}$  at  $D \in \mathcal{E}' \cap \tilde{\mathcal{E}} : \tilde{t} \cap \tilde{\mathcal{E}} = \{D\}$ . We claim that  $\tilde{t}$  is also tangent to the ellipse  $\mathcal{E}'$ . To prove this claim suppose the contrary. Then there exists  $D' \in \tilde{t}$ ,  $D' \neq D$  such that  $D' \in \mathcal{E}'$ ; see Figure 7. From the focal property of  $\tilde{\mathcal{E}}$  (Proposition 1) we get  $AD' + D'C > AD + DC$ . But our special choice of  $D \in \mathcal{E}'$  implies  $AD + DC = \frac{1}{2}p_{AC} \geq AD' + D'C$ . We get a contradiction, and this proves the claim. From now on we use the notation  $t'$  for the line  $\tilde{t}$  as well:  $t' = \tilde{t}$ . It can be observed that the two diameters  $KL$  and  $MN$  of  $\mathcal{E}'$  have merged to form the single diameter  $BD$ .

Let us notice that we have just shown that the points  $B$  and  $D$  are two double common points of the two different ellipses  $\mathcal{E}'$  and  $\tilde{\mathcal{E}}$ . So it is possible to resort to elementary Cartesian algebraic geometry to see that a diameter  $BD$  of  $\mathcal{E}'$  with the property that  $p(AC, BD) = p_{AC}$  is unique; see [3, Section 16.4]. But we stress that the uniqueness of the diameter  $BD$  will also follow from the important geometric step in our proof to be established below (see (14)) that the tangent  $t'$  of  $\mathcal{E}'$  at  $D$  is perpendicular to the tangent  $t$  of  $\mathcal{E}$  at  $A$ ; cf. the *Geometric Criterion* in the introduction.

From the optical property (Proposition 2) it follows that the radii  $AD$  and  $CD$  of  $\tilde{\mathcal{E}}$  make equal angles with the tangent  $\tilde{t} = t'$  at  $D$  and also the radii  $FD$  and  $DG$  of  $\mathcal{E}'$  do the same.

So we conclude that

$$\alpha := \angle GDC = \beta := \angle FDA;$$

see Figure 7.

Our next claim is that a configuration depicted in Figure 7 of the convex angles  $FDG$  and  $ADC$ , both symmetric with respect to the common normal  $n'$  of  $\mathcal{E}'$  and  $\tilde{\mathcal{E}}$  at  $D$ , is generic, i.e., the angle  $FDG$  is included properly in the angle  $ADC$ , so  $\alpha = \beta > 0$ .

First, we have the sharp inequality  $\tilde{a} = \frac{1}{4}p_{AC} > a'$ , because if  $RS$  is the greatest diameter of  $\mathcal{E}'$  and the parallelogram  $ARCS$  does not degenerate to a segment, then  $\tilde{a} \geq \frac{1}{4}p(AC, RS) = \frac{1}{2}(AR + AS) > \frac{1}{2}RS = a'$ , and if  $ARCS$  degenerates to a segment, then  $AC$  is the greatest diameter  $AC$  of  $\mathcal{E}$  and we choose the smallest diameter  $XZ$  of  $\mathcal{E}'$  (perpendicular to  $AC$ ) instead of  $RS$  to get by Pythagoras' theorem [6, I. 47] that  $\tilde{a} = \frac{1}{4}p_{AC} \geq \frac{1}{4}p(AC, XZ) = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{b^2 + b'^2 + c^2} > \sqrt{b^2 + c^2} = a'$ , as  $b > 0$ .

Next project orthogonally the points  $O, F, A$  on the line  $t' = \tilde{t}$  to the points  $\dot{O}, \dot{F}, \dot{A}$ , respectively; see Figure 8. Apply Proposition 4 to the ellipses  $\mathcal{E}'$  and  $\tilde{\mathcal{E}}$  to get  $O\dot{F} = a'$ ,  $O\dot{A} = \tilde{a} > a'$ .

In Figure 8 denote

$$\varphi := \angle O\dot{A}\dot{O}, \quad \psi := \angle O\dot{F}\dot{O}.$$

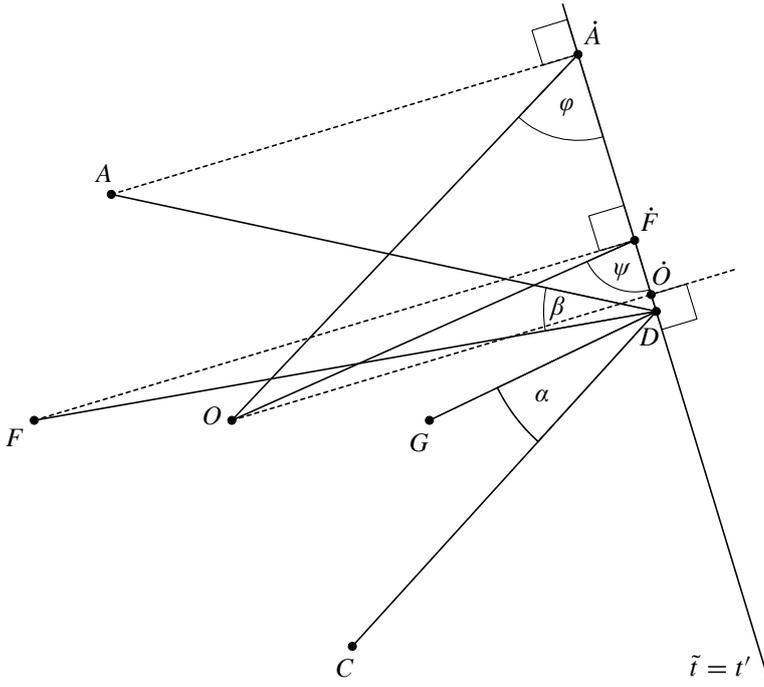


Figure 8 Generic configuration of the angles  $FDG$  and  $ADC$ ,  $\alpha = \beta = \psi - \varphi > 0$ . Details from Figure 7.

We see that

$$\sin \varphi = \frac{O\dot{O}}{O\dot{A}} = \frac{O\dot{O}}{\tilde{a}}, \quad \sin \psi = \frac{O\dot{O}}{O\dot{F}} = \frac{O\dot{O}}{a'} \quad \left(0 < \varphi, \psi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Because  $\tilde{a} > a'$ , it follows that

$$0 < \varphi < \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Now observe that in Figure 8 we have

$$O\dot{A} \parallel CD, \quad O\dot{F} \parallel GD;$$

cf. Remark 1 in Section 2. Therefore

$$\alpha = \beta = \psi - \varphi > 0.$$

This ends the verification of our claim that a configuration of the convex angles  $FDG$  and  $ADC$  in Figure 7 is generic.

Now we are prepared to apply the Coxeter–Greitzer Lemma (Proposition 6) to the parallelogram  $AGCF$  and the point  $D$  outside it; see Figure 7. We get

$$\gamma := \angle GAD = \angle GCD > 0;$$

see Figure 9.

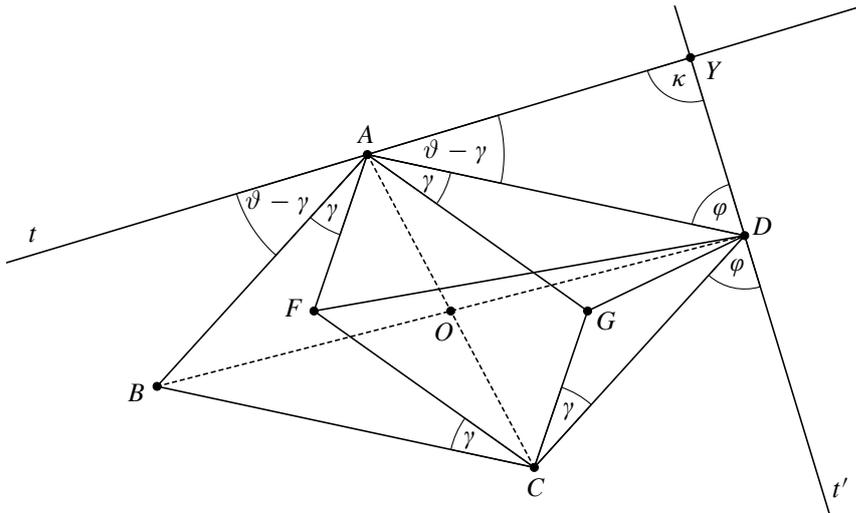


Figure 9 Proving  $\kappa = \frac{\pi}{2}$ .

Both the parallelograms  $AFCG$  and  $ABCD$  are symmetric with respect to  $O$ . So the triangles  $BAF$  and  $DCG$  are also symmetric with respect to  $O$ . Therefore

$$\angle BAF = \angle GAD = \gamma > 0.$$

Also, for symmetry reasons, the configuration of the radii  $FA$  and  $GA$  of  $\mathcal{E}$  and of the segments  $BA$  and  $AD$  in Figure 9 is generic, i.e., the convex angle  $FAG$  lies inside the convex angle  $BAD$  properly.

Let  $t$  be a tangent of  $\mathcal{E}$  at  $A$ . By the optical property of  $\mathcal{E}$  (Proposition 2) the radii  $FA$  and  $GA$  make equal angles  $= \vartheta$  with  $t$ . It follows that the segments  $BA$  and  $AD$  make equal angles  $= \vartheta - \gamma$  with  $t$ . In fact  $0 < \vartheta - \gamma < \frac{\pi}{2}$ , because in the parallelogram  $ABCD$  we have  $\angle BAD = \pi - \angle ADC = 2\varphi$ , so  $2(\vartheta - \gamma) = \pi - \angle BAD = \pi - 2\varphi$  and

$$0 < \vartheta - \gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad (13)$$

for we proved before that  $0 < \varphi < \psi \leq \frac{\pi}{2}$ . The relation (13) means that the tangents  $t$  and  $t'$  intersect at the right angle, so the *Geometric Criterion* from the introduction for the maximality of the perimeter of  $ABCD$  holds; see Figures 9 and 1. In these figures the intersection point of  $t$  and  $t'$  is denoted by  $Y$ . Let us formulate the perpendicularity relation (13) as

$$\kappa := \angle(t, t') = \angle AYD = \frac{\pi}{2}. \quad (14)$$

As the diameter  $AC$  of  $\mathcal{E}$  determines a direction of the tangent  $t$  of  $\mathcal{E}$  ([1, II.49]) and for any ellipse there exists only one pair of tangents of the ellipse having a given direction ([1, II.50]), we conclude from (14) that a diameter  $BD$  of  $\mathcal{E}'$  with the property that  $p(AC, BD) = p_{AC}$  is unique. We mentioned in the beginning of proof that the uniqueness of  $BD$  (just proved geometrically) is an algebraic consequence of the coincidence of the tangents  $t'$  of  $\mathcal{E}'$  and  $\tilde{t}$  of  $\tilde{\mathcal{E}}$  at  $D$  as well.

Due to (14) the assumptions of the Monge circle theorem for a pair of confocal ellipses (Proposition 7) are satisfied. So we get

$$OY = \sqrt{b^2 + b'^2 + c^2}.$$

Recall that the ellipse  $\tilde{\mathcal{E}}$  with foci  $A$  and  $C$  touches the straight line  $t' = \tilde{t}$  at  $D$ ; see Figures 7 and 9. Proposition 4 applied to  $\tilde{\mathcal{E}}$  and  $M := D$ ,  $\tilde{F} := Y$  gives

$$OY = \tilde{a}.$$

It follows that

$$p_{AC} = 2(AD + DC) = 4\tilde{a} = 4 OY = 4\sqrt{b^2 + b'^2 + c^2}.$$

The theorem is proved.

### Acknowledgement

We thank the referee for a number of proposals aimed at improving the presentation of the note. We incorporated many of them into the present version. We thank very much Gerhard Wanner for his permission to include his neat proof of the generalized Monge circle theorem (Proposition 7) in the present note; see Section 4.

---

**References**

- [1] Apollonius of Perga, *Treatise on conic sections*, ed. by T.L. Heath, Cambridge University Press, Cambridge, 1896.
- [2] M. Berger, *Geometrie*, vol. 2, Nathan, Paris, 1990.
- [3] M. Berger, *Geometry I, II*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2009.
- [4] A. Connes, D. Zagier, *A property of parallelograms inscribed in ellipses*, Amer. Math. Monthly 114 (2007), 909–914.
- [5] H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer, *Geometry revisited*, MAA, New York, 1967.
- [6] Euclides of Alexandria, *The thirteen books of the Elements*, vol. 1–3, ed. by T.L. Heath, Cambridge University Press, Cambridge, 1926.
- [7] Pappus of Alexandria, *Book 7 of the “Collection”*, ed. by A. Jones, 2 vols., Springer, New York – Heidelberg – Berlin, 1986.
- [8] J.-M. Richard, *Safe domain and elementary geometry*, Eur. J. Phys. 25 (2004), 835–844.
- [9] S. Tabachnikov, *Geometry and billiards*, AMS, Providence, R.I., 2005.

Dorota Blinkiewicz, Piotr Rzonsowski and Bogdan Szydło

Faculty of Mathematics and Computer Science

Adam Mickiewicz University

Umultowska 87

PL-61-614 Poznań, Poland

e-mails: dorota.blinkiewicz@amu.edu.pl

rzonsol@amu.edu.pl

bszydlo@amu.edu.pl

---

---

## Short note Les problèmes de Fermat et Lemoine

---

---

François Sigrist

### 1 Le problème de Fermat

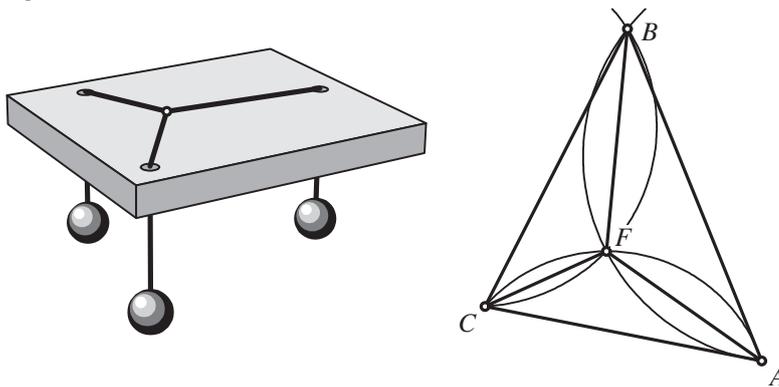
Il s'agit ici d'un problème posé par Fermat, peu connu, mais qui offre de spectaculaires développements dans la géométrie plane, une discipline souvent abandonnée par manque d'intérêt (Cf Dieudonné : A bas Euclide ! Mort aux triangles !).

Trouver, dans un triangle  $ABC$ , le point  $F$  qui minimise  $FA + FB + FC$ , la somme des distances aux sommets. Pour un ingénieur, cela consiste à construire le réseau routier de longueur minimale entre trois villes. Pour que le problème soit réaliste, il faut supposer que les angles du triangle sont inférieurs à  $120^\circ$ .

La solution expérimentale (image de gauche) fait appel aux lois de la mécanique, et le calcul différentiel donne la solution théorique :

Le gradient de la distance à un point est un vecteur-unité (la dérivée directionnelle est 1). Pour que la somme des trois distances soit minimale, il est nécessaire de trouver trois vecteurs-unité de somme nulle. Il est alors presque immédiat de montrer qu'il n'y a qu'une seule configuration : trois vecteurs formant des angles de  $120^\circ$  entre eux.

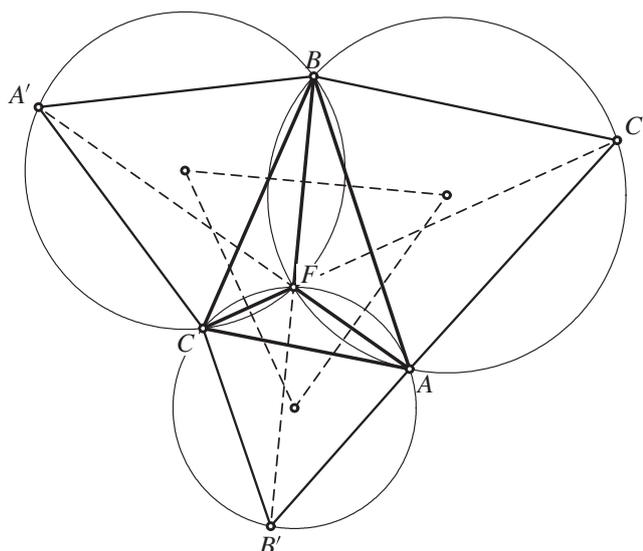
Le point de Fermat est donc celui d'où l'on voit les trois côtés du triangle sous un angle de  $120^\circ$  degrés.



Pour construire le point  $F$ , il suffit donc de tracer les trois *arcs capables* de  $120^\circ$  : points d'où l'on voit les côtés sous un angle de  $120$  degrés. La construction est élémentaire et est basée sur le *théorème de l'angle inscrit*.

## 2 Le problème de Fermat revisité

Voici le même dessin que précédemment où l'on a simplement complété les ingrédients nécessaires à la construction des arcs capables, et ajouté les triangles équilatéraux sur chaque côté du triangle  $ABC$ .



Les deux observations suivantes :

- Les angles  $CFA'$  et  $CBA'$  sont égaux ( $60^\circ$ ) (théorème de l'angle inscrit)
- Les triangles  $A'CA$  et  $BCB'$  sont égaux (rotation de  $60^\circ$ )

permettent de tirer une impressionnante cascade de conséquences :

- Tous les angles en  $F$  valent  $60^\circ$ .
- Les points  $A'FA$ ,  $B'FB$  et  $C'FC$  sont alignés. Conséquence : Pour construire le point de Fermat, il suffit de dessiner les trois triangles équilatéraux.
- Les longueurs  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  sont égales.
- Le triangle formé par les centres des cercles est équilatéral (il a trois angles de  $60^\circ$  !)

Pour relier la longueur  $AA'$  au triangle de départ, il reste à montrer que la longueur  $FA'$  est égale à  $FB + FC$ , montrant ainsi que les trois longueurs égales  $AA'$ ,  $BB'$ , et  $CC'$  sont égales à  $FA + FB + FC$  (longueur du réseau routier !). Ceci s'obtient grâce au petit lemme de Ptolémée, que nous démontrerons au paragraphe suivant.

La propriété du triangle des centres est connue sous le nom de *Théorème de Napoléon*. Il n'est pas certain que Napoléon l'ait démontré, mais le contexte historique montre que Napoléon n'était pas étranger au résultat.

Tout d'abord, Napoléon connaissait d'assez près les mathématiciens prestigieux de l'époque (Poncelet, Fourier, Monge, Lagrange, ...). On a ensuite (malheureusement sans autre commentaire) une citation dans un journal italien de 1911, disant que Napoléon aurait parlé du problème à Lagrange.

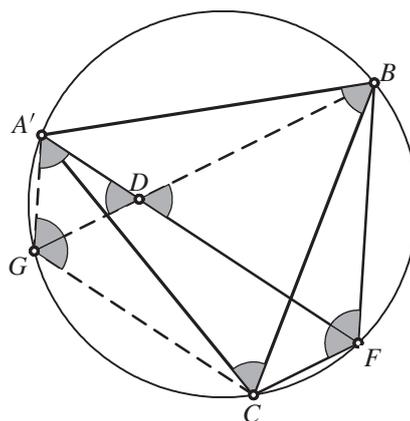
D'après Henri Lebesgue, Lagrange lui aurait dit : «Mon Général, nous nous attendions à tout de vous, sauf à des leçons de géométrie».

On sait par ailleurs qu'à Ste-Hélène, Napoléon aurait donné des leçons de mathématiques aux enfants de Las Cases.

### 3 Le petit lemme de Ptolémée

Reprenons le quadrilatère  $A'CFB$ , auquel on ajoute la parallèle par  $C$  à  $A'F$ , obtenant ainsi encore les points  $G$  et  $D$ . Il est presque immédiat de constater que tous les angles marqués sur la figure valent 60 degrés (symétrie ou théorème de l'angle inscrit). Les triangles  $A'GD$  et  $FBD$  sont donc équilatéraux, et on en déduit que  $FA' = FD + DA' = FB + DG = FB + FC$ , comme prévu.

Remarque : Le lemme de Ptolémée lui-même est une version plus générale : Si un quadrilatère est inscrit dans un cercle, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés. Voir [2] pour une élégante démonstration.



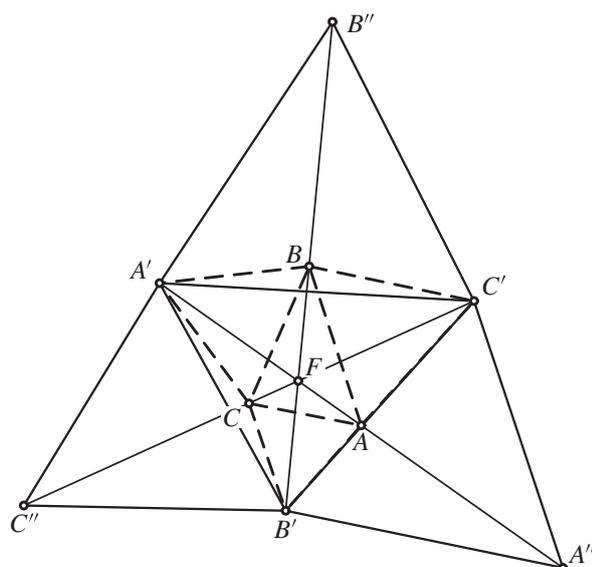
### 4 Le problème de Lemoine

Ce problème est en quelque sorte la réciproque de problème de Fermat : reconstituer le triangle  $ABC$  à partir du triangle  $A'B'C'$ . La solution est spectaculaire, il suffit d'itérer la construction du point de Fermat, en l'appliquant au triangle  $A'B'C'$ . L'image en haut de la page suivante donne la solution.

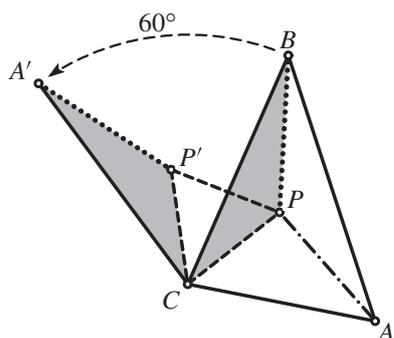
Comme tous les angles en  $F$  sont égaux à  $60^\circ$ , le point  $F$  est point de Fermat commun aux trois triangles  $ABC$ ,  $A'B'C'$  et  $A''B''C''$ . Pour retrouver le triangle  $ABC$ , il suffit donc de localiser les sommets  $A$ ,  $B$ , et  $C$  sur les droites  $A'A''$ , resp.  $B'B''$ , resp.  $C'C''$ . Le résultat, spectaculaire, est à nouveau donné par le petit lemme de Ptolémée :

$$\begin{aligned} FA'' &= FB' + FC' = (FA + FC) + (FA + FB) \\ FB'' &= FA' + FC' = (FB + FC) + (FA + FB) \\ FC'' &= FA' + FB' = (FB + FC) + (FA + FC) \\ FA'' + FB'' + FC'' &= B'B'' = 2(FA + FB + FC) = 2B'B \end{aligned}$$

L'extraordinaire résultat est donc que les points  $A$ ,  $B$ , et  $C$  sont les milieux de  $A'A''$ ,  $B'B''$ ,  $C'C''$ .



## 5 Remarques finales



Pour les puristes de la géométrie, voici une solution du problème de Fermat ne nécessitant ni calcul différentiel, ni lemme de Ptolémée. Voir [1].

Le croquis parle de lui-même : pour tout point  $P$  du triangle  $ABC$ , la somme  $PA + PB + PC$  peut se représenter par une ligne brisée de  $A$  à  $A'$ . C'est donc la ligne droite  $AA'$  qui contient le point de Fermat.

On doit à Kiepert une solution détaillée du problème de Lemoine [3, 4], suivie de plusieurs articles sur une généralisation du problème de Fermat.

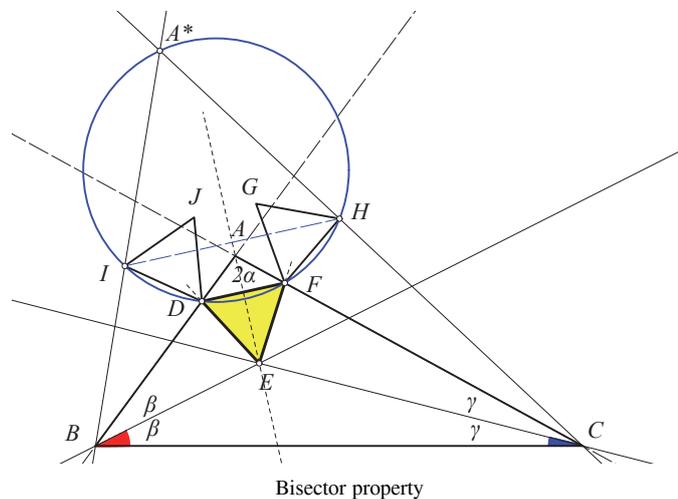
## Références

- [1] Coxeter, H.S.M., Introduction to geometry, John Wiley & Sons (1961)
- [2] Paunić, D., Wanner, G., On the proof of Ptolemy's lemma, *El. Math.* **72** (2017)
- [3] Lemoine, É., "Question 864", *Nouv. Ann. Math.*, **7** (1868)
- [4] Kiepert, L., "Solution de Question 864", *Nouv. Ann. Math.* **8** (1869)

## Short note    A short proof of Morley's theorem

Paris Pamfilos

Among the dozens of proofs of Morley's Theorem, the proofs of J.M. Child [J.M23] and Naranjangar [HC67, p. 47] are particularly neat. In this paper, we simplify them by stressing the symmetry of the equilateral and the symmetries created by two reflections.<sup>1</sup>



For this, we start with a trivial property of the bisectors of a triangle  $ABC$  with angles  $\{2\alpha, 2\beta, 2\gamma\}$ .

**Lemma.** *From the incenter  $E$  of triangle  $ABC$  and on both sides of  $AE$  draw two lines inclined to it by  $30^\circ$  and intersecting the other sides, respectively at  $D, F$ . Then  $DEF$  is equilateral and  $DF$  is orthogonal to  $AE$ .*

Having that, reflect  $BE$  and  $DEF$  on  $AB$  to obtain  $BI$  and the equilateral  $DIJ$ . Do the same on the other side, i.e., reflect  $CE$  and  $DEF$  on  $CF$  to obtain  $CH$  and the equilateral  $FHG$ . By the symmetry with respect to  $AE$  the quadrilateral  $IDFH$  is an isosceles

<sup>1</sup>I would like to express my gratitude to the referee, for pointing out to me the proof by J.M. Child and making several useful remarks, helping me towards a better and more concise exposition.

trapezium with three equal sides, hence cyclic, and its angle  $\widehat{IHF}$  is easily computed:

$$\begin{aligned}\widehat{IDF} &= \widehat{IDJ} + \widehat{JDF} = 60^\circ + 2(90^\circ - \alpha) = 60^\circ + 180^\circ - 2\alpha = 60^\circ + 2\beta + 2\gamma \Rightarrow \\ \widehat{IHF} &= 180^\circ - \widehat{IDF} = 120^\circ - 2\beta - 2\gamma.\end{aligned}$$

This, essentially, finishes the proof, since the arcs  $(IDF)$  and  $(IDFH)$  are in ratio 2:3 and the angle at the intersection point  $A^*$  of lines  $BI$  and  $CH$  will be then of measure  $\widehat{A^*} = 180^\circ - 3\beta - 3\gamma$ . This shows that  $A^*$  is on the circumcircle  $\kappa$  of  $IDFH$  and  $\{A^*D, A^*F\}$  are the trisectors of  $\widehat{A^*}$ , implying obviously that, “for a triangle  $A^*BC$  with base angles  $\{3\beta, 3\gamma\}$  the adjacent trisectors intersect at the vertices of an equilateral triangle”, as required by the theorem of Morley.

## References

- [HC67] S. Greitzer, H. Coxeter. *Geometry Revisited*. Mathematical Association of America, Washington D.C., 1967.
- [J.M23] J.M. Child. Proof of “Morley’s theorem”. *Mathematical Gazette*, 11:171, 1923.

Paris Pamfilos  
University of Crete, Greece  
e-mail: pamfilos@uoc.gr

---

---

## Aufgaben

---

---

### Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. November 2019 erbeten und können auf postalischem Weg an  
Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als  
Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` einge-  
reicht werden.

**Aufgabe 1386:** Sei  $ABC$  ein spitzwinkliges Dreieck mit  $a \neq b$  und Umkreis  $k$ . Die Punkte  
 $E \in BC$  und  $F \in CA$  seien die Höhenfusspunkte der Höhen  $h_a$  resp.  $h_b$  und  $N$  der  
Mittelpunkt von  $EF$ . Weiter schneide die Gerade  $CN$  den Umkreis in  $Z$  und  $U$ ,  $V$  seien  
die von  $Z$  verschiedenen Schnittpunkte  $ZE \cap k$  resp.  $ZF \cap k$ . Schliesslich sei  $P$  der  
Schnittpunkt der Geraden  $AU$  und  $BV$ . Zeige, dass sich die Geraden  $UV$  und  $AB$  auf der  
Tangenten im Punkt  $P$  an den Umkreis des Dreiecks  $CPN$  schneiden.

Andrew Wu, McLean, USA

**Aufgabe 1387:** Es sei für eine komplexe Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$S = a + d$  deren Spur und  $D = ad - bc$  deren Determinante. Man stelle für natürliches  $n$   
die Spur der Matrix  $A^n$  als Polynom von  $S$  und  $D$  dar.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

**Aufgabe 1388 (Die einfache dritte Aufgabe):** Die Beziehung

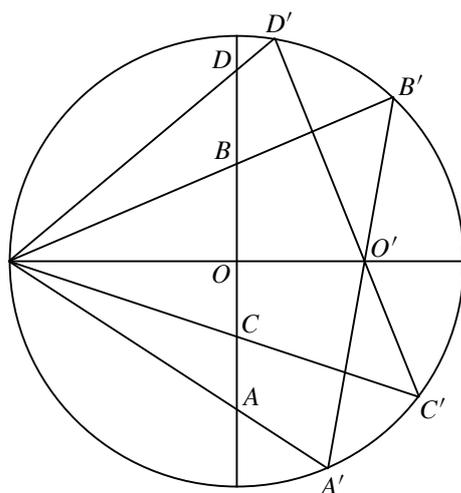
$$A'O' \cdot B'O' = D'O' \cdot C'O'$$

(siehe Figur auf der nächsten Seite) heisst Eukl. III.35 und ist seit über 2300 Jahren be-  
kannt. Weniger populär ist dagegen das ähnliche Resultat

$$AO \cdot BO = DO \cdot CO.$$

Gefragt ist ein möglichst eleganter Beweis, eventuell mit Literaturziten.

Gerhard Wanner, Genève, CH

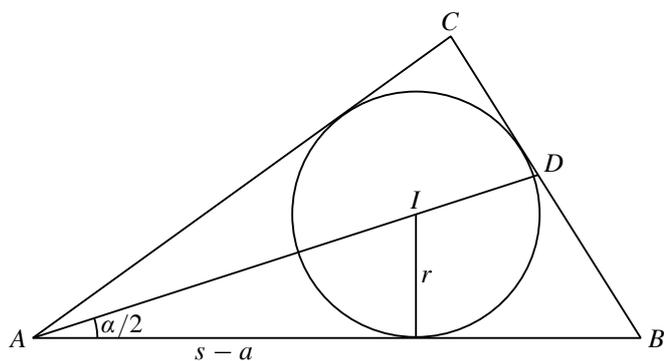


**Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2018**

**Aufgabe 1374.** Im Dreieck seien  $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$  die Winkelhalbierenden und  $R$  und  $r$  der Um- bzw. der Inkreisradius. Beweise die folgende Ungleichung

$$\frac{1}{w_\alpha} + \frac{1}{w_\beta} + \frac{1}{w_\gamma} \geq \frac{1}{2r} + \frac{1}{R}.$$

Martin Lukarevski, Skopje, MK



**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Von folgenden 10 Lesern sind Beiträge eingetroffen: Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Gheorghe Bercea (München, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Volkhard Schindler (Berlin, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Viele geometrische Dreiecksungleichungen lassen sich auf die eulersche Ungleichung  $2r \leq R$  zurückführen. Diesen Weg verfolgt auch *Walter Burgherr*, dessen Lösung wir folgen.

Im Dreieck  $ABC$  mit Seiten  $a, b, c$  seien  $I$  der Inkreismittelpunkt,  $D$  der Schnittpunkt von  $w_\alpha$  mit  $BC$  und  $s$  der halbe Umfang. Nach dem Satz über die Winkelhalbierenden ist einerseits  $CD = \frac{ab}{b+c}$  und andererseits, angewendet mit  $w_\gamma$  auf das Dreieck  $ADC$ ,

$$AI = w_\alpha \frac{b}{b + \frac{ab}{b+c}} = w_\alpha \frac{b+c}{a+b+c} = w_\alpha \frac{2s-a}{2s} = \frac{r}{\sin(\frac{\alpha}{2})}.$$

Daraus erhält man mit  $\frac{r}{s-a} = \tan(\frac{\alpha}{2})$

$$\frac{1}{w_\alpha} = \frac{(2s-a)\sin(\frac{\alpha}{2})}{2rs} = \frac{s\sin(\frac{\alpha}{2})}{2rs} + \frac{(s-a)\sin(\frac{\alpha}{2})}{2rs} = \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{2r} + \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{2s}. \quad (1)$$

Der Ausdruck

$$T = \frac{1}{w_\alpha} + \frac{1}{w_\beta} + \frac{1}{w_\gamma} - \frac{1}{2r} - \frac{1}{R}$$

soll gemäss Behauptung positiv sein. Nach (1) und durch zyklisches Vertauschen wird

$$T = \frac{1}{2r} \left( \left( \sum_{\text{zyk.}} \sin(\frac{\alpha}{2}) \right) - 1 \right) + \frac{1}{2s} \left( \sum_{\text{zyk.}} \cos(\frac{\alpha}{2}) \right) - \frac{1}{R}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} & \left( \left( \sum_{\text{zyk.}} \sin(\frac{\alpha}{2}) \right) - 1 \right) \left( \sum_{\text{zyk.}} \cos(\frac{\alpha}{2}) \right) \\ &= \sum_{\text{zyk.}} \sin(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2}) + \sum_{\text{zyk.}} \sin(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\beta}{2}) + \sum_{\text{zyk.}} \sin(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\gamma}{2}) - \sum_{\text{zyk.}} \cos(\frac{\alpha}{2}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\text{zyk.}} \sin(\alpha) + \sum_{\text{zyk.}} \sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) - \sum_{\text{zyk.}} \cos(\frac{\alpha}{2}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\text{zyk.}} \sin(\alpha), \end{aligned} \quad (2)$$

wobei die letzten beiden Summen wegen  $\sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) = \cos(\frac{\gamma}{2})$  verschwinden.

Setzt man  $x = \sin(\frac{\alpha}{2}) + \sin(\frac{\beta}{2}) + \sin(\frac{\gamma}{2}) - 1$ , so vereinfacht sich  $T$  wegen (2) und unter Anwendung des Sinussatzes  $\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) = \frac{s}{R}$  zu

$$T = \frac{x}{2r} + \frac{1}{4Rx} - \frac{1}{R},$$

dabei gilt  $x > 0$ . Die quadratische Ungleichung

$$4r \cdot R \cdot x \cdot T = 2Rx^2 - 4rx + r \geq 0$$

ist erfüllt, denn die Diskriminante  $8r(2r - R)$  ist wegen der eulerschen Ungleichung  $2r \leq R$  negativ, ausser im Fall des gleichseitigen Dreiecks für das  $2r = R$  und  $x = \frac{1}{2}$  gilt.

Bemerkung: *Walther Janous* gibt noch an, dass der Faktor  $\frac{1}{2}$  bei  $\frac{1}{r}$  nicht vergrössert werden kann. Ist nämlich  $\frac{1}{w_\alpha} + \frac{1}{w_\beta} + \frac{1}{w_\gamma} \geq \frac{p}{r} + \frac{q}{R}$ , so ist notwendigerweise  $p \leq \frac{1}{2}$ .

**Aufgabe 1375.** Bestimme alle natürlichen Zahlen, die sich als Summe von paarweise verschiedenen Zahlen der Form  $3^\alpha \cdot 5^\beta$  mit  $\alpha, \beta \geq 0$  schreiben lassen.

Jürgen Spilker, Stegen, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 6 Zuschriften von folgenden Lesern eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D) und Albert Stadler (Herrliberg, CH).

Da sich, bis auf endlich viele Ausnahmen, jede natürliche Zahl in der geforderten Weise schreiben lässt, wird man früher oder später mit einem Induktionsbeweis zu Werke gehen. Wir präsentieren die Lösung von *Walther Janous*.

Die zu bestimmende Menge ist  $M = \mathbb{N} \setminus \{2, 7, 11, 22\}$ .

Dass 2, 7, 11 und 22 nicht in  $M$  enthalten sind, ersieht man unschwer aus der „Basis“ 1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, ... von  $M$ .

Für  $z \in M$ , also  $z = \sum_{j \geq 1} 3^{\alpha_j(z)} \cdot 5^{\beta_j(z)}$  gilt wegen  $3z = \sum_{j \geq 1} 3^{\alpha_j(z)+1} \cdot 5^{\beta_j(z)}$ ,  $3z + 1 = 3^0 \cdot 5^0 + \sum_{j \geq 1} 3^{\alpha_j(z)+1} \cdot 5^{\beta_j(z)}$  und  $3z + 5 = 3^0 \cdot 5^1 + \sum_{j \geq 1} 3^{\alpha_j(z)+1} \cdot 5^{\beta_j(z)}$ , dass auch  $3z$ ,  $3z + 1$ ,  $3z + 5 \in M$  und analog auch  $5z$ ,  $5z + 1$ ,  $5z + 3 \in M$ .

Mit diesen beiden Rekursionen erhält man von 1 ausgehend mit etwas Geduld sofort, dass bis 71 (abgesehen von 2, 7, 11 und 22) alle Zahlen bis auf 34, 38 und 67 Elemente von  $M$  sind. Wegen  $34 = 1 + 3 + 5 + 5^2$ ,  $38 = 1 + 3 + 3^2 + 5^2$  und  $67 = 3 \cdot 5 + 5^2 + 3^3$  sind aber auch diese drei Zahlen in  $M$  enthalten.

Es sei nun  $z \geq 72$ . Mit den drei Fällen

$$z \equiv 0 \pmod{3}, \text{ also } z = 3n \text{ mit } n \geq 24,$$

$$z \equiv 1 \pmod{3}, \text{ also } z = 3n + 1 \text{ mit } n \geq 24 \text{ bzw.}$$

$$z \equiv 2 \pmod{3}, \text{ also } z = 3n + 5 \text{ mit } n \geq 23$$

ergibt sich induktiv, dass  $z \in M$  und wir sind am Ende des Beweises.

**Aufgabe 1376 (Die einfache dritte Aufgabe).** Das nebenstehende Bild entstand auf der Poya-Brücke in Fribourg: Die Sonne scheint durch das Schutzgitter, und ihre Spiegelbilder an den horizontalen Stäben des Gitters bilden eine Kurve, die Teil einer Hyperbel sein könnte.

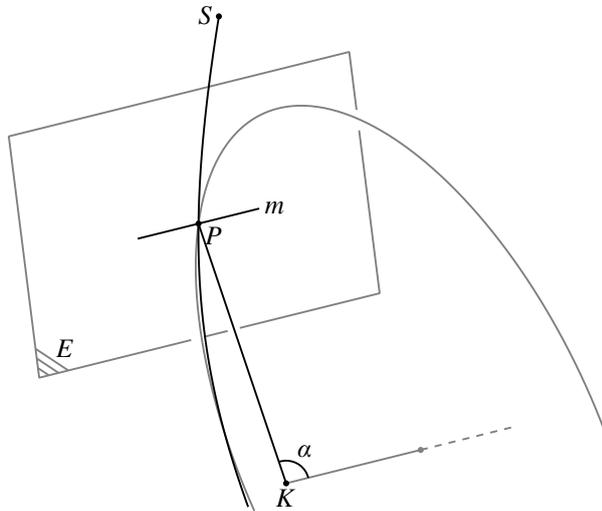
Ist das wirklich eine Hyperbel? Wenn ja, so gebe man die Achse und eine erzeugende Gerade des Kegels an, der diese Hyperbel als Schnitt mit der Ebene des Gitters erzeugt.

Hansklus Rummler, Fribourg, CH



**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Folgende 5 Leser haben Lösungen eingesandt: Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Gerhard Wanner (Genève, CH).

Zwei einfache geometrische Prinzipien: Reflexionsgesetz und Winkel an parallelen Geraden führen hier ziemlich einfach zum Ziel. Wir folgen der Lösung vom *Fritz Siegerist*, der das exemplarisch ausführt.



Ja, es ist ein Ast einer Hyperbel. Die Kegelachse verläuft in Richtung der Gitterstäbe und durch die Kamera. Eine erzeugende Gerade des Kegels ist der direkte Sonnenstrahl in die Kamera.

Die Richtung des einfallenden Lichtes sei weder parallel noch senkrecht zu den Stäben. Je nach Auftreffpunkt  $P$  ist der ausfallende Strahl unterschiedlich gerichtet. Allerdings sind die Winkel zwischen ein- und ausfallendem Strahl und der Zylindermantellinie  $m$  (der Stab ist als dünner Zylinder gedacht) immer gleich gross: Es herrscht eine 2-zählige Drehsymmetrie (Symmetrieachse normal zur Zylinderoberfläche in  $P$ ). Sämtliche reflektierte Strahlen des Gitters bilden mit den Stäben des Gitters Winkel derselben Grösse  $\alpha$ .

Fällt nun Licht auf ein raumfüllendes Stabgitter, so bilden die reflektierten Strahlen, welche bei der Kamera  $K$  eintreffen, einen Kegelmantel mit Spitze  $K$  und halbem Öffnungswinkel  $\alpha$ .

Die Reflexionspunkte  $P$  liegen somit auf einem Schnitt dieses Kegels mit der Gitterebene  $E$ . Weil diese den Kegel parallel zur Kegelachse schneidet, ist es eine Hyperbel.

Der zweite Ast der Hyperbel hätte Bedeutung für entgegengesetzt einfallendes Licht, d.h. die Sonne stände im Rücken des Beobachters. Steht die Sonne  $S$  hinter dem Gitter, so sieht die Kamera diese immer auf der Hyperbel; es gibt dann eine streifende Fast-Reflexion.

---

---

## Rezensionen

---

---

**D. Madan and W. Schoutens: Applied conic functions.** 187 pages, £ 64.99. Cambridge University Press 2016, ISBN 978-1-107-15169-7 (hardback).

Classical financial mathematics has its origins in the problem of how to find fair prices of risky assets, that is, uncertain financial cash flows taking place at a future time  $T$  but traded today. One of its corner stones is the no-arbitrage principle. In non-technical terms, it says that it is almost impossible to make any gain at some future point in time without any starting capital and without taking any risk beforehand. Another basic topic of financial mathematics deals with the uniqueness of today's market prices of risky assets. Under certain natural assumptions prices are shown to be unique. Further, under these assumptions risk can be completely eliminated. The elimination of risk in the classical models which cannot be observed in the real financial markets is a fundamental aspect this book addresses.

Conic finance does not assume a unique price and does not completely exclude arbitrage. Although they might be rare, there are occasions of arbitrage opportunities. Moreover, in real-life financial markets the one-price assumption does not hold since differently from the ask price at which the market "is willing to sell" a given asset, there is the bid price at which the market "is willing to buy" this asset. Further, rather than trying to eliminate all risks (which is not possible) one should concede on acceptability of certain risks. This is where the subject of *risk measurement* enters into the picture as we shall see.

Let us assume that risky assets materializing at some future time  $T$  are modeled as finite random variables on some probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . For the sake of simplicity,  $\Omega$  is assumed to be finite. Let  $X$  be a risky asset which the market is willing to buy today, i.e., at time zero, for the price  $c$ . Using the compound interest rate  $r$ , the risky asset  $X - e^{rT}c$  has the price zero at time zero and thus constitutes a so-called *zero-cost cash flow*. Provided  $X - e^{rT}c$  is positive, this zero cost cash flow is in fact an arbitrage opportunity.

The set  $\mathcal{A}$  of risks materializing at  $T$  which the market *accepts at time zero* is modeled as a subset of  $L^1$ . Reasonably, this is assumed to be a convex cone: If  $X, Y \in \mathcal{A}$  then  $X + Y \in \mathcal{A}$  and if  $Z \in \mathcal{A}$  then  $\lambda Z \in \mathcal{A}$  for any  $\lambda \geq 0$ . One further requires that  $\mathcal{A}$  intersects non trivially with the zero cost cash flows and should include at least the arbitrage opportunities among them.

Let  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  be the set of probability measures  $Q$  on  $\mathcal{F}$  such that  $E^Q[X] \geq 0$  for all  $X \in \mathcal{A}$ . This is a convex subset in the space of all probability measures on  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Intuitively,  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  models the different attitudes present in the market towards acceptable risks. Now what is the best price at which the market is willing to buy  $X$ ? This is given by

$$b(X) = \inf_{Q \in \mathcal{M}(\mathcal{A})} e^{-rT} E^Q[X],$$

the *bid price*. The best price at which the market is willing to sell  $X$  is given by

$$a(X) = \sup_{Q \in \mathcal{M}(\mathcal{A})} e^{-rT} E^Q[X],$$

the *ask price*. Now we have a frame work for a two-price economy, as  $b(X) \leq a(X)$ , where the inequality is usually strict. As detailed out in Chapter 4, the pricing functional  $a$  is nothing else than a *coherent risk measure on  $\mathcal{A}$* .

One can argue, however, that the specification of the set of acceptable risks might be a daunting task. Fortunately, under additional assumptions on  $a$ , one can show that there is a concave function  $\Psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , called a

probability distortion, such that

$$a(X) = \int_{\mathbb{R}} x d\Psi(F_X(x)),$$

where  $F_X$  is the probability distribution of  $X$ . Since  $b(X) = -a(-X)$ , there is a similar expression for the bid price. Therefore, bid and ask prices can be specified by explicitly introducing a function  $\Psi$  as above. It is shown that in this two-price economy, ask and bid prices are no longer additive but subadditive and superadditive, that is,  $a(X + Y) \leq a(X) + a(Y)$  and  $b(X + Y) \geq b(X) + b(Y)$ .

We have very briefly presented the rudiments of conic finance which is, as the title suggests, the central topic of the book. Conic finance starts with Chapter 4. In the remaining Chapters 5–11, the book offers numerous applications of conic finance: Among them, conic pricing of options, applications to risk measurement, portfolio optimization with respect to a diversity measure, conic hedging where the hedging result is measured in the introduced diversity measure (in a static and dynamic sense) and hedging of insurance contracts. The latter particularly shows the relevance of the theory developed to life insurance where the classical finance theory has its well-known limitations. The final chapter explains what is meant by trading in a Markovian context.

The book starts in a fairly elementary way by presenting the classical arbitrage theory and the famous Black Scholes valuation of European options. The reader acquainted with financial mathematics also might find a lot of interesting material in the introducing three chapters. We mention the variance-gamma processes and the Sato model in the context of financial mathematics. Variance-gamma processes are of interest here because they are pure jump processes in contrast to Brownian motion that is widely used as the source of stochasticity in stock values.

Despite the rich variety of topics covered, the book is comparably small. This is possible because most proofs of results are omitted. However, they can be found easily in the literature due to the extensive reference list.

Apart from carefully explaining all things developed, an emphasis is laid on detailed numerical examples which makes the book a very valuable introduction for beginners in the field of conic finance. It gives a new and fresh well-studied view on classical aspects on mathematical finance theory.

Martin Jakob, Olten  
Stephan Schultze, Künsnacht

**Dirk W. Hoffmann: Die Gödel'schen Unvollständigkeitssätze.** 356 Seiten, 26.99 € (Softcover). Springer, 2017; ISBN 978-3-662-54299-6.

Mit dem Untertitel *Eine geführte Reise durch Kurt Gödels historischen Beweis* präzisiert Hoffmann den Inhalt seines Buches: Es geht um eine Darstellung von Gödels Originalbeweis seiner Unvollständigkeitsresultate aus dem Jahr 1931.

Konsequenterweise beginnt das Buch mit einem Wegweiser in Form der 26 verkleinerten Faksimile Seiten von Gödels Originalarbeit und der Angabe, in welchem Abschnitt diese behandelt werden. Es folgt ein einleitendes Kapitel, in dem die Problematik der Unvollständigkeit von formalen Systemen erläutert wird. Zudem wird diese Fragestellung, sowie Gödels Arbeit in einen historischen Zusammenhang gestellt.

In den nächsten Kapiteln führt Hoffmann sein Programm zielorientiert durch: Die formalen Grundlagen der Mathematik werden erarbeitet und anschliessend eine Beweisskizze entworfen. Zentraler Punkt hierbei ist die Arithmetisierung der Syntax. Es folgt eine Einführung in das formale System  $P$ , sowie in die Theorie der primitiv rekursiven Funktionen und Relationen und deren Repräsentierbarkeit durch Formeln in  $P$ . Im abschliessenden Kapitel wird Gödels erster Unvollständigkeitssatz bewiesen und diskutiert. Zudem führt Hoffmann durch Gödels Beweisskizze des zweiten Unvollständigkeitssatzes.

Wie ein Leitmotiv werden immer wieder Abschnitte aus Gödels Originalarbeit eingestreut und danach erläutert und kommentiert. Dadurch gelingt es Hoffmann, die Materie auf eine sehr lebendige Weise zu vermitteln und dem Leser zudem einen tiefen Einblick in Gödels Ideen zu gewähren.

Da Hoffmann die benötigten mathematischen Grundkenntnisse fast vollständig einführt, macht er Gödels Unvollständigkeitssätze einem grossen mathematisch interessierten Publikum zugänglich.

Andreas Haldimann  
ZHAW Zürcher Hochschule  
für Angewandte Wissenschaften