Calculs de la valeur client à l'aide d'une nouvelle approche stochastique et des fonctions génératrices

Antoine Ayache – Professeur, UFR de Mathématiques, USTL

Michel Calciu – Maître de Conférences, IAE de Lille, USTL

Miriam Fradon - Maître de Conférences, UFR de Mathématiques, USTL

Francis Salerno – Professeur, IAE de Lille, USTL

Calculs de la valeur client à l'aide d'une nouvelle approche stochastique et des fonctions génératrices

Résumé

Ce papier propose une formulation stochastique des calculs de la valeur client en partant du modèle de rétention de la clientèle (Dwyer, 1989). Il montre que, pour des probabilités de rétention de clientèle constantes dans le temps, la réponse cumulée dans le cadre d'un modèle de rétention suit une distribution géométrique. En utilisant les fonctions génératrices, cette approche est ensuite étendue à d'autres distributions de probabilité qui représentent des dynamiques similaires du comportement client. L'artefact du potentiel transactionnel actualisé est introduit pour généraliser l'approche de Blattberg et Deighton (1996) pour le calcul de la valeur et du capital client. Pour illustrer et tester les formules proposées, des analyses de sensibilité sont développées à partir d'exemples adaptés d'une série de travaux antérieurs qui s'inscrivent dans la même direction de recherche.

Mots clés: valeur client, capital client, rétention de clientèle, marketing relationnel

Customer Lifetime Value Calculations using generating functions and a new stochastic approach

Abstract

This paper gives a stochastic formulation to customer lifetime value calculations based on the so called customer retention model (Dwyer, 1989). It shows that when retention probabilities are constant with time the cumulative response within a retention model has a geometric distribution. This approach is then extended, using generating functions, to other probability distributions which capture similar patterns of dynamic customer behaviour. The discounted potential transactions artefact is used to generalise Blattberg and Deighton's (1996) approach to lifetime value and customer equity calculations. Extensive sensitivity analysis is performed on examples collected from previous papers belonging the same research track in order to illustrate and test the formulae that have been obtained.

Keywords: customer lifetime value, customer equity, customer retention, relationship marketing

Introduction

Dans la plupart des contextes marketing, le développement d'un marketing « centré client » et interactif conduit à la mise en avant des méthodes d'évaluation des clients et des portefeuilles de clients. Comprendre ces méthodes peut changer la manière avec laquelle sont gérés les clients (Mulhern 1999; Niraj, Gupta, & Narasimhan 2001; Reinartz, Thomas, & Kumar 2005). Dans une perspective d'attraction et de rétention des clients, un client rentable est un client dont les revenus générés tout au long de la relation commerciale dépassent d'un montant acceptable les coûts supportés pour l'attirer, le satisfaire et le conserver. Ce montant est appelé valeur du client ou valeur de la durée de vie client (lifetime value ou LTV). Il inclut les profits directs et potentiels issus de cette relation (Berger & Nasr 1998; Mulhern 1999). On suppose généralement qu'un client crée d'autant plus de valeur pour l'entreprise que sa durée de vie commerciale est longue (Jain et Singh, 2002).
Les calculs de la valeur client aident à résoudre différents problèmes fondamentaux tels que la budgétisation des dépenses pour l'acquisition des clients, la sélection des médias de recrutement (la LTV est généralement différente selon les médias de recrutement utilisés) ou des types d'offres, la répartition des efforts entre prospection et fidélisation. Bien conduite l'analyse de la valeur client LTV peut aussi conduire à la construction d'un avantage concurrentiel durable (Jackson, 1996).

La modélisation de cette valeur client dépend du contexte ou du comportement relationnel du client (situation contractuelle ou non) et l'analyse des efforts de modélisation montre bien qu'ils se développement a partir d'une distinction entre rétention et migration de clientèle. Très tôt, Dwyer (1989) a ainsi présenté des exemples de calcul de LTV a partir des deux contextes majeurs distingués par Jackson(1985) en milieu industriel : les acheteurs de type « always a share » et les acheteurs de type « lost for good ». Dwyer (1989) souligna le caractère plus général de cette distinction, l'étendit au marché des particuliers et montra que le comportement de type « always a share », qu'il associe au *modèle de migration*, est généralement représentatif de l'achat par catalogue ; tandis que le comportement de type « lost for good », qu'il associe au *modèle de rétention*, est représentatif des services financiers, des abonnements de presse, etc.

A partir de ces travaux de Berger et Nasr (1998) et de Blattberg et Deighton (1996), Pfeifer et Carraway (2000) travaillent en appliquant les chaînes de Markov à la modélisation de la relation client et aux calculs de la LTV. Calciu et Salerno (2002) synthétisent et organisent plusieurs formules de calcul de la Lifetime Value. Ils utilisent une double taxonomie : celle des modèles de comportement relationnel du client - les modèles de rétention et de migration - et celle des méthodes de calcul - algébrique et matriciel. Plusieurs études empirique ont été développés depuis en utilisant cette dichotomie (Gupta, Lehmann, & Stuart ,2004; Kumar, Ramani, & Bohling, 2004; Reinartz et al. 2005)

Les deux types de comportement temporels des clients dans la relation avec l'entreprise, appelés différemment selon les auteurs (« lost for good » / « always a share » pour Jackson, « modèle de rétention »/ « modèle de migration » pour Dwyer ou « contractuel »/ « non contractuel » pour Reinartz et Kumar), affichent des patterns de migration différents. Le *modèle de rétention* considère qu'une unité sociale reste cliente tant qu'elle génère des transactions. Cela signifie que si a un moment donné le client ne renouvelle pas son contrat ou ne génère aucune transaction il peut être considéré comme perdu pour de bon (*lost for good*) ou « ex-client ». Cela veut aussi dire que si un « ex-client » achète de nouveau il est considéré comme nouveau client et il s'agit plutôt d'un problème d'acquisition que de rétention de clientèle. L'évaluation du potentiel du client dans une relation de ce type va uniquement prendre en compte la *probabilité de rester client actif* d'une période à une autre ou ce que Blattberg, Getz et Thomas (2001) appellent la *probabilité de survie* du client. La durée de vie du client (customer lifetime) correspond au nombre de périodes successives durant lesquelles le client est et reste actif.

A contrario, le *modèle de migration* considère que les clients peuvent se re-manifester après quelques périodes sans achats et trace leur probabilité de se " réactiver ". L'évaluation du potentiel du client dans une telle relation repose sur la prise en compte jointe des probabilités de *rester* et de *redevenir client actif* après un nombre fixe de périodes, autrement dit, des probabilités de " *survie* " et de " *réactivation* ". La *durée de vie du client* correspond au nombre de périodes successives durant lesquelles le client, selon les estimations de l'entreprise, reste actif ou peut se réactiver. Pour qu'un client puisse conserver cette qualité après des périodes d'inactivité, la probabilité de se réactiver estimée par l'entreprise doit être supérieure à la probabilité de réponse des prospects. Dans le cas contraire le client est éliminé de la base de données des clients et il devient un ex-client ou « purge », si l'on adopte la terminologie utilisée par les professionnels du marketing direct.

Ce papier propose une formulation stochastique des calculs de la valeur client en partant du modèle de rétention. Il montre d'abord que, pour des probabilités de rétention de clientèle constantes dans le temps, la réponse cumulée dans le cadre d'un modèle de rétention suit une distribution géométrique. Il utilise ensuite les fonctions génératrices, pour étendre cette approche à d'autres distributions de probabilité qui représentent des dynamiques similaires du comportement client. L'artefact du potentiel transactionnel actualisé est introduit pour généraliser l'approche de Blattberg et Deighton (1996) pour le calcul de la valeur et du capital client. Pour illustrer et tester les formules proposées, des analyses de sensibilité sont développées à partir d'exemples adaptés d'une série de travaux antérieurs qui s'inscrivent dans la même direction de recherche.

Formulation stochastique du modèle de rétention et quelques extensions

Ce papier ce concentre sur le modèle de rétention, selon lequel les clients, une fois perdus, ne reviennent plus (Rust, Lemon, & Zeithaml 2004). L'évaluation du potentiel du client dans une relation de ce type va uniquement prendre en compte la probabilité de rester client actif d'une période à une autre, ce que Blattberg et al. appellent la probabilité de survie du client. Au niveau individuel cela correspond à la **probabilité d'un client de faire exactement *n* achats** (et de s'arrêter après la n[ième] transaction). Ce qui peut être noté $P(T=n)$**,** où *T* est une variable aléatoire représentant le nombre cumulé de transactions. Cette formulation est plutôt générale et permet des extensions supplémentaires de l'analyse à des situations où les achats ne doivent pas être strictement consécutifs.

Dans le cas d'un modèle de rétention la *durée de vie du client* (*lifetime*), correspond au nombre successif de périodes pour lesquelles le client reste actif. Si chaque transaction produit un gain unitaire (1 euro) alors le *potentiel transactionnel* d'un client qui reste actif *n* périodes vaut *n* unités monétaires. Mais en termes financiers, des revenus différés doivent être actualisés en appliquant un taux d'actualisation *a* ($a\in[0,1)$). Ainsi, le *potentiel transactionnel actualisé* du client en termes monétaires devient $\sum_{t=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1+a}\right)^t$.

Lorsqu'une *perspective à long terme* est adoptée, les clients acquis à une certaine période forment une cohorte (ou une population) avec des durées de vie potentielles (ou nombre d'achats potentiels) qui varient de un à l'infini. Le revenu moyen normalisé et actualisé d'une cohorte de clients peut être exprimé en termes stochastiques comme

$$T^a = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{t=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1+a} \right)^t \right) P(T=n) \qquad (1)$$

ce qui est équivalent à la formule (2)

$$T^a = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{P(T>t)}{(1+a)^t} \qquad (2)$$

Ceci est la formulation stochastique du potentiel transactionnel à long terme actualisé décrit dans Calciu et Salerno (2002).

Ces formules captent deux phénomènes à prendre en compte pour l'évaluation d'une cohorte de clients. L'un, *l'attrition*, intervient sur toute la durée de vie de la cohorte et révèle que les taux de rétention d'une période à l'autre sont toujours inférieurs à 100%. L'autre phénomène relève de la nécessité d'actualiser des revenus futurs. Un gain de 1 € obtenu après *k* années ne vaut plus que $1/(1+a)^k$, où a représente le taux d'actualisation. Tout gain futur généré par une cohorte de clients sera simultanément affecté par l'attrition et par le taux d'actualisation et nécessite une correction.

Même si, intuitivement, un horizon de temps fini semble convenir dans les calculs de la lifetime value des clients, plusieurs arguments importants favorisent l'adoption d'un horizon infini. Premièrement, cela évite de fixer un horizon de temps arbitraire pour la durée de vie (lifetime) d'un client. Deuxièmement, les taux de rétention indiquent que la survie des clients, la probabilité de rester, diminue significativement. Troisièmement, l'application jointe des taux de rétention et actualisation garantit que les revenus en provenance d'un futur éloigné contribuent très peu à la LTV (lifetime value). Enfin, les modèles avec un horizon de temps infini sont beaucoup plus faciles à calculer et estimer (Gupta, Lehmann and Stuart, 2004).

T^a la valeur espérée du potentiel transactionnel actualisé des clients, ou le revenu moyen normalisé et actualisé, n'est qu'un artefact de calcul (computationnel), une étape préliminaire dans les calculs de la lifetime value. Quand les marges et les coûts par client retenu restent constants ($m_1=m_2=$ .. $=m$) and ($c_1=c_2=$ .. $=c$) il est possible de calculer la Lifetime Value V^a du client en utilisant la formule suivante:

$$V^a = (m - c)T^a \tag{3}$$

Dwyer donne un exemple numérique qui illustre les mécanismes essentiels d'un modèle de rétention. Cet exemple a ensuite été adopté et discuté par de nombreux auteurs. Il traite d'une entreprise de presse magazine qui évalue le potentiel transactionnel et la valeur de ses abonnés pour une durée de vie estimée à cinq ans. La marge par client retenu est de 40€ dont 20€ sont des revenus issus des abonnements et 20€ sont des revenus publicitaires. Les coûts marketing par client retenu sont de 28€ et le taux d'actualisation est fixé à 20%.

Table 1 – Un exemple typique de modèles de rétention (adapté de Dwyer, 1989)

No.	Péri-ode	Probabilité de rétention (r)	Probabilité de survie (s)	Transactions Cumulées	Transactions actualisées	Transactions cumulées actualisées (T^a)	Valeur présente nette par période	LTV client (V^a)
			Π(3)	Σ(4)	**(4)**/$(1+a)^t$	Σ(6)	(m-c)***(6)**	Σ(8)
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**	**(8)**	**(9)**
1	0	1.000	1.000	1.00	1.00	1.00	12	12
2	1	0.708	0.708	1.71	0.59	1.59	7	19
3	2	0.792	0.561	2.27	0.39	1.98	5	24
4	3	0.826	0.463	2.73	0.27	2.25	3	27
5	4	0.840	0.389	**3.12**	0.19	**2.43**	2	**29**
...	...	...	...	...	...	...	...	...
19	18	0.850	0.040	5.09	0.00	2.88	0	35
20	19	0.850	0.034	**5.12**	0.00	**2.89**	0	**35**

Dans cet exemple la probabilité de rester client (colonne 3) augmente légèrement avec le temps et se stabilise après quelques périodes. La *probabilité de survie* (colonne 4) à chaque période *t* est $\prod_{k=0}^{t} p_k$, le produit des probabilités de rester client durant toutes ces périodes. Il indique le nombre espéré de transactions par client à chaque période. Le nombre espéré cumulé de transactions par client durant la période analysée (colonne 5) est $\sum_{k=0}^{t} \left(\prod_{l=0}^{k} p_l \right)$ c’est-à-dire la somme des probabilités de survie. Les colonnes 6 et 7 représentent les équivalents actualisés des colonnes 4 et 5. La probabilité de survie actualisée est une mesure ajustée des transactions espérées à chaque période (colonne 6) et les transactions cumulées actualisées (colonne 7) sont la somme de ces probabilités de survie actualisées $\sum_{k=0}^{t}\left[\left(\prod_{l=0}^{k} p_l\right)/(1+a)^k\right]$. Le tableau montre que le nombre espéré de transactions pour une durée de vie du client de 5 périodes est de 3,12 et sa version actualisée est 2,43. Le potentiel transactionnel actualisé à long terme est atteint en période 20 et reste inchangé à 2,89 quand l'horizon temporel est infini.

La valeur espérée du client durant chaque période (colonne 8) est le profit d'une transaction multiplié par le nombre espéré de transactions actualisé. Les valeurs pour la durée de vie et à long terme (colonne 9) sont obtenues en multipliant le profit d'une transaction par le potentiel transactionnel actualisé comme dans la formule 3.

Ces calculs sont représentatifs du phénomène analysé et aident à introduire les calculs de base associés à la LTV. Ils se réfèrent strictement au modèle de rétention décrit auparavant. Les développements suivants visent à étendre cette approche et à produire une formulation stochastique généralisée.

En développent la formule (1) on arrive à

$$T^a = \frac{1+a}{a}\left[1-\sum\left(\frac{1}{1+a}\right)^n P(T=n)\right] \tag{4}$$

ce qui est équivalent à

$$T^a = \frac{1+a}{a}\left[1-E\left[\left(\frac{1}{1+a}\right)^T\right]\right] \tag{5}$$

et

$$T^a = \frac{1+a}{a}\left[1-G\left(\frac{1}{1+a}\right)\right] \tag{6}$$

La fonction $s \to G(s)=E(s^T)$ est appelée la **fonction génératrice de la variable aléatoire** T . Les fonctions génératrices représentent un outil important dans la théorie de la probabilité. Elle ont été calculées pour un grand nombre de distribution de probabilité et peuvent être retrouvé dans tout manuel de probabilités. C'est la raison pour laquelle cette formule semble être très convenable pour le calcul du potentiel transactionnel T^a pour plusieurs distributions connues et illustrées dans le tableau 2.

Table 2 – Calcul du potentiel transactionnel actualisé d'une cohorte de clients en utilisant les fonctions génératrices de plusieurs distributions de probabilité connues

Distribution	$P(T=n)$, ***n > 1***	$E(T)$	$G(s)$	$T^a=\frac{1+a}{a}\left[1-G\left(\frac{1}{1+a}\right)\right]$
Géométrique	$(1-p)p^{n-1}$	$(1-p)^{-1}$	$\frac{1-p}{s^{-1}-p}$	$\frac{1+a}{1+a-p}$
Poisson	$\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha}$	$1+\alpha$	$se^{\alpha(s-1)}$	$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left[1-e^{\frac{-\alpha a}{1+a}}\right]$
Neg.bino-miale (2,p)	$(n-1)p^{n-k}(1-p)^2$	$2(1-p)^{-1}$	$\left[\frac{1-p}{s^{-1}-p}\right]^2$	$(1+a)\frac{a+2-2p}{(1+a-p)^2}$
Neg.bino-miale (k,p)	$C_{n-1}^{k-1}p^{n-k}(1-p)^k$	$k(1-p)^{-1}$	$\left[\frac{1-p}{s^{-1}-p}\right]^k$	$\frac{1+a}{a}\left[1-\left(\frac{1-p}{1+a-p}\right)^k\right]$

La *distribution géométrique* peut être assimilée à un cas particulier du modèle de rétention discuté auparavant, où les probabilité de rétention restent constantes durant toute la durée de vie du client ($p_1=p_2=$ .. = p). Les autres distributions de probabilité listées dans le tableau 2 reposent sur la même présomption que les probabilités d'achat restent constantes durant la vie du client.

La *distribution négative binomiale* s'applique à des situations où les client sont toujours considérés en tant que tel même s'ils ne répètent pas leurs achats k fois durant leur vie. Cela signifie que le client est considéré comme « perdu pour de bon » (*lost for good*) seulement après k occasions où il n'a pas acheté. Elle peut être appliquée dans des situations où une deuxième vie (ou troisième, ou quatrième) est considérée (Stauss et Friege, 1999; Thomas, Blattberg & Fox, 2004). Dans certaines circonstances cette distribution peut être utilisée pour représenter un modèle de migration à probabilités d'achat constantes.

La *distribution Poisson* peut être appliquée à des situations ou les clients deviennent se lassent du produit.

Chaque distribution du tableau 2, représente un modèle spécifique de comportement dynamique du client et peut être utilisé dans des calculs de la « *lifetime value* » et de la « *long term* » value du client.

Prenons la *distribution géométrique* qui correspond au modèle de rétention à probabilités constantes. L'adaptation de l'exemple de Dwyer à une situation ou la probabilité de rétention reste constante conduit aux calculs suivants:

Table 3 – Un exemple de modèle de rétention à probabilités constantes (distribution géométrique)

No.	Péri-ode	Probabilité de retention (r)	Probabilité de survie (s)	Transactions Cumulées	Transactions actualisées	Transactions cumulées actualisées (T^a)	Valeur présente nette par periode	LTV client (V^a)
			$\Pi(3)$	$\Sigma(4)$	**(4)**/$(1+a)^t$	$\Sigma(6)$	(m-c)***(6)**	$\Sigma(8)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	0	1.0	1.000	1.00	1.00	1.00	12	12
2	1	0.8	0.800	1.80	0.67	1.67	8	20
3	2	0.8	0.640	2.44	0.44	2.11	5	25
4	3	0.8	0.512	2.95	0.30	2.41	4	29
5	4	0.8	0.410	**3.36**	0.20	**2.60**	2	**31**
...	...	...	...	...	...	...	...	...
19	18	0.8	0.018	4.93	0.00	3.00	0	36
20	19	0.8	0.014	**4.94**	0.00	**3.00**	0	**36**

Dans une durée de vie client (*lifetime*) de 5 périodes on peut atteindre 3,36 transactions ce qui correspond à 2,43 transactions actualisées. Le potentiel à long terme 3 est atteint en période 16 et reste le même quand l'horizon devient infini. Ce résultat est facilement vérifié en appliquant la fonction génératrice de la distribution géométrique pour calculer le potentiel transactionnel à long terme du tableau 2, $T^a=(1+a)/(1+a-p)=(1+0,2)/(1+0,2-0.8)=3$.

La *distribution négative binomiale* peut être vue comme une généralisation de la distribution géométrique et, en tant que telle, permet la représentation d'une gamme plus large de comportements dynamiques des clients. En faisant varier le coefficient *k* de la distribution négative binomiale dans le tableau 2 on obtient les formulations suivantes du potentiel transactionnel actualisé à long terme (voir tableau 4), en utilisant la formule: $T^a=(1+a)/a\left[1-\left((1-p)/(1+a-p)\right)^k\right]$.

Tableau 4 – Valeurs de T^a pour de coefficients k variables dans la distribution négative binomiale

k:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T^a:	3.00	4.50	5.25	5.62	5.81	5.91	5.95	5.98	5.99	5.99	6.00	6.0

Le coefficient k=1 signifie que si un client n'achète pas une fois il est considéré comme perdu pour de bon et doit être rayé de la liste des clients (purgé). C'est typiquement le cas du modèle de rétention. Quand k=2 le client est considéré comme perdu pour de bon seulement après ne pas avoir acheté deux fois, quand k=3 il est perdu pour de bon après ne pas avoir acheté trois fois et ainsi de suite. Cela signifie que plus les valeurs de k sont grandes, plus des clients sont retenus d'un cycle d'affaire (business cycle) à l'autre, ce qui entraîne un nombre plus important de transactions cumulées à long terme. Cela explique pourquoi une augmentation .des valeurs de *k* correspond à un potentiel transactionnel actualisé à long terme plus grand

Formulation stochastique du calcul de la lifetime value du client et optimisation

Un regard proactif sur les calculs de la lifetime value des clients devrait prendre en compte deux aspects importants. Premièrement, la valeur produite dépend de la probabilité de réponse du client qui à son tour est déterminée par les efforts de rétention. Blattberg et Deighton (1996) expriment la probabilité de rétention comme une fonction de l'effort marketing (R) affecté aux clients ciblés à chaque période. La probabilité de rétention peut être exprimée comme fonction du budget de rétention de la manière suivante: p(R) = plafond * (1-exp(-b* R)). Le plafond et la sensibilité (élasticité) (b) du client à l'effort de rétention peuvent être estimés par calcul décisionnel (*decision calculus*) en utilisant des estimations subjective de la réponse des clients par les responsables (Berger & Nasr, 1998; Calciu & Salerno, 2002).
Deuxièmement, la marge est seulement collectée sur les clients qui restent après la campagne de rétention alors que les coûts de rétention s'appliquent à tous les clients ou prospects ciblés au début de la campagne.
En prenant en compte ces deux aspects, nous développons une formulation stochastique plus générale des calculs de la lifetime value. Elle permet d'exprimer les probabilités de réponse comme une fonction des coûts de rétention de la firme et d'allouer de manière optimale les dépenses de rétention. Elle offre aussi une généralité suffisante pour pouvoir accommoder

plusieurs modèles de dynamique des clients. En considérant comme auparavant, les marges (m) par client retenu et les coûts par client ciblé (R) comme constants dans le temps nous généralisons la formule (3) comme suit:

$$V^a(R) = m\sum_{t=1}^{\infty} \frac{P(T \geq t+1)}{(1+a)^t} - R\sum_{t=1}^{\infty} \frac{P(T \geq t)}{(1+a)^t} + m \qquad (7)$$

Cette formula calcule la lifetime value du client comme fonction des coûts de rétention par client ciblé. Elle indique que à t=0 la société reçoit de la marge des clients acquis sans supporter de coûts car, par convention et comme Berger et Nasr (1998), nous considérons que les coûts d'acquisition des clients doivent être traité séparément. Au t>0 les coûts de rétention (*R)* sont affectés à tous les clients ciblés présents dans la cohorte (au temps t) tandis que la marge (m) est collectée seulement sur des clients qui auront répondu, c'est-à-dire les clients toujours présent une période plus tard (au temps t+1).

T^a est un artefact convenable pour représenter le nombre cumulé de transactions alias clients. En utilisant (2) dans (7) nous obtenons:

$$V^a(R) = \left(m - \frac{R}{1+a}\right) T^a(p(R)) \qquad (7)$$

Celle-ci est une formulation assez générale qui peut être appliquée à tous les modèles de rétention et à d'autres modèles associés de la dynamique des clients. Comme la valeur à long terme des clients est une fonction des coûts de rétention, les responsables peuvent utiliser cette formule pour trouver les dépenses optimales de rétention des clients.

Application au modèle de rétention à probabilités constantes

Le cas particulier des modèles de rétention à probabilités de rétention constantes a été assimilé ici au modèle de distribution géométrique. Sa valeur à long terme peut facilement être calculée en introduisant le T^a qui correspond à la distribution géométrique du tableau 2 dans la formule (8) et en exprimant la probabilité de rétention comme une fonction de l'effort de rétention p(R).

La formule à maximiser devient:

$$V^a(R) = \left(m - \frac{R}{1+a}\right)\left(\frac{1+a}{1+a-p(R)}\right) = \frac{(1+a)m - R}{1+a-p(R)} \qquad (8)$$

La dépense de rétention R optimum peut être trouvé en maximisant $V^a(R)$.

La procédure d'optimisation est analogue à celle suggérée par Blattberg et Deighton (1996). La ressemblance entre nos formules et celles développées par ces auteurs ressort plus clairement si on utilise comme point de départ pour dériver la valeur client à long terme la formule (7) qui est plus explicite.

$$V^a(R)=\frac{T^a(p(R))}{1+a}(mp(R)-R)+m=\frac{mp(R)-R}{1+a-p(R)}+m=\frac{(1+a)m-R}{1+a-p(R)} \qquad (9)$$

Cette formule montre clairement que, dans le processus de rétention, le profit d'une transaction est donné par la marge multipliée par la probabilité de retenir le client moins le coût de rétention. Elle met en évidence que les coûts de rétention sont affectés à tous les clients ciblés tandis que la marge est collectée seulement sur les clients retenus.

Pour donner un exemple nous utilisons les données du tableau 3 avec la différence notable que la probabilité de rétention n'est pas fixée d'avance mais constitue une fonction de réponse contrôlable par le décideur à travers les dépenses de rétention: *p(R)*=0,81*(1-exp(-0,16*R)). Une illustration graphique est donnée par la figure 2 où le modèle de rétention à probabilité constante apparaît comme un cas particulier d'un modèle plus général de la dynamique des clients basé sur la distribution négative binomiale, où le coefficient de tolérance *k* =1.

Elle montre que l'effort optimal de rétention par client R est de 14€. Il produit une probabilité de rétention p(R)=0,723 et une valeur à long terme maximum (voir formule 10) de ((1+0.2)*40 -14)/ (1+0.2-0.723)=71.39€.

Application au modèle plus général de la distribution négative binomiale

Afin de montrer que les formules de calcul de la lifetime value des clients développées ici ne sont pas limitées au modèle de rétention nous appliquons la même procédure d'optimisation au modèle du comportement dynamique du client plus flexible qui peut être assimilé au à la distribution négative binomiale. Comme indiqué précédemment la distribution négative binomiale peut être vue comme une généralisation de la distribution géométrique. Comme dans le modèle de rétention discuté auparavant le client à toujours une probabilité d'achat constante, mais l'achat ne doit pas intervenir successivement. Le client a maintenant un degré de tolérance *k* et sera considéré comme « perdu pour de bon » (*lost for good*) seulement après k achats non répétés. Prenons le cas où *k=2*. Le client peut se réactiver après ne pas avoir acheté une fois et sera considéré comme perdu pour de bon seulement après ne pas avoir acheté une deuxième fois. Il fera exactement *n* achats si le profil (*pattern*) des transactions est celui de la figure 1.

Figure 1 – Profile des transactions dans un modèle de réponse neg.binomial avec degré de tolérance k=2

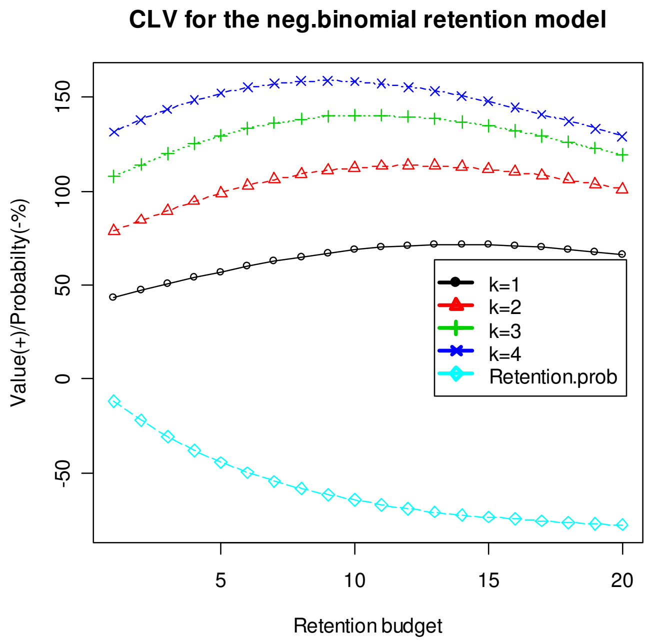
$$
\begin{array}{lll}
 & USSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS\cdots SS & U \\
\text{or} & SUSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS\cdots SS & U \\
\text{or} & SSUSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS\cdots SS & U \\
\text{or} & SSSUSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS\cdots SS & U \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\text{or} & \underbrace{SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSU\cdots SS}_{\substack{n-1\text{ transactions}\\ \text{only one of them}\\ \text{unsatifying}}} & \underbrace{U}_{\substack{\text{one last}\\ \text{unsatisfying}\\ \text{transation}}}
\end{array}
$$

Le calcul de la lifetime value qui correspond à ce cas général avec des valeurs variables de *k,* peut être déduit en introduisant la formule pour T^a qui correspond à la distribution négative binomiale du tableau 2 dans la formule 8 :

$$V^a(R) = \left(m - \frac{R}{1+a}\right)\left(\frac{1+a}{a}\right)\left[1 - \left(\frac{1-p(R)}{1+a-p(R)}\right)^k\right] \qquad (10)$$

On peut montrer que pour k=1, qui est le modèle de rétention à probabilités constantes, la formule 10 se réduit à la formule 9, utilisée pour maximiser la lifetime value du client dans le modèle de rétention à probabilité constante. L'exemple numérique est le même que celui du modèle de rétention à probabilité constante mais une formule plus générale (10) et des coefficients de tolérance k variables sont utilisés.

Figure 2 – Calcul de la valeur actualisée nette optimale en utilisant différents profils de rétention négative binomiale



Comme montré plus haut, augmenter la valeur de *k* permet d'obtenir un plus grand potentiel transactionnel actualisé pour probabilité d'achat donnée (p). De manière analogue, pour des dépenses de rétention données et une probabilité d'achat fixe, la valeur du client à long terme augmente aussi avec *k*. Plus le degré de tolérance *k* est grand, moins les dépenses par client sont nécessaires pour maximiser sa lifetime value.

Dans l'étape suivante nous étendons le raisonnement de Blattberg et Deighton (1996) à un modèle plus général d'acquisition et rétention basé sur la distribution négative binomiale. Nous utilisons les mêmes données inspirées de Dwyer (1989) avec la réponse d'acquisition et de rétention collectée virtuellement par calcul décisionnel (decision calculus), comme Berger et Nasr (1998).

Procédure étendue pour trouver la répartition optimale entre les coûts d'acquisition et de rétention

Pour avoir une image compète de la profitabilité des clients, on ne peut ignorer l'étape d'acquisition, celle qui transforme les prospects en clients. Blattberg et Deighton (1996) appellent cette mesure de profitabilité du client "customer equity" ou capital client et proposent un modèle qui permet d'optimiser l'acquisition et la rétention des clients. Leur procédure transposée à notre approche généralisée peut être exprimé par la formule suivante qui sépare la phase d'acquisition de la phase de rétention tout en calculant ce qu'ils dénomment le capital client (*customer equity*) :

$$CE^a(A,R) = p(A)V^a - A = p(A)\left[\left(m - \frac{R}{1+a}\right)T^a(p(R)) - m\right] + p(A)m - A \qquad (11)$$

où A sont les coûts d'acquisition et p(A) la probabilité d'acquisition. Cette formule complète la logique du calcul de la valeur client en incluant les coûts d'acquisition des clients $c_a = A/p(A)$.

Pour le cas particulier du modèle de rétention à probabilités constantes la formule (11) peut être exprimée d'un manière plus proche de la démarche originale de Blattberg et Deighton (1996) :

$$CE^a(A,R) = p(A)\left(\frac{m\,p(R) - R}{1+a}\right)T^a(p(R)) - A \qquad (12)$$

En suivant les raisonnement appliqué précédemment au coûts de rétention, les coûts d'acquisition peuvent être exprimés comme des dépenses par prospect et divisés par la probabilité d'acquisition p(A), qui à son tour est un fonction de ces dépenses. Maximiser la profitabilité des clients se réduit à l'optimisation successive de la valeur d'acquisition et de la valeur de rétention.

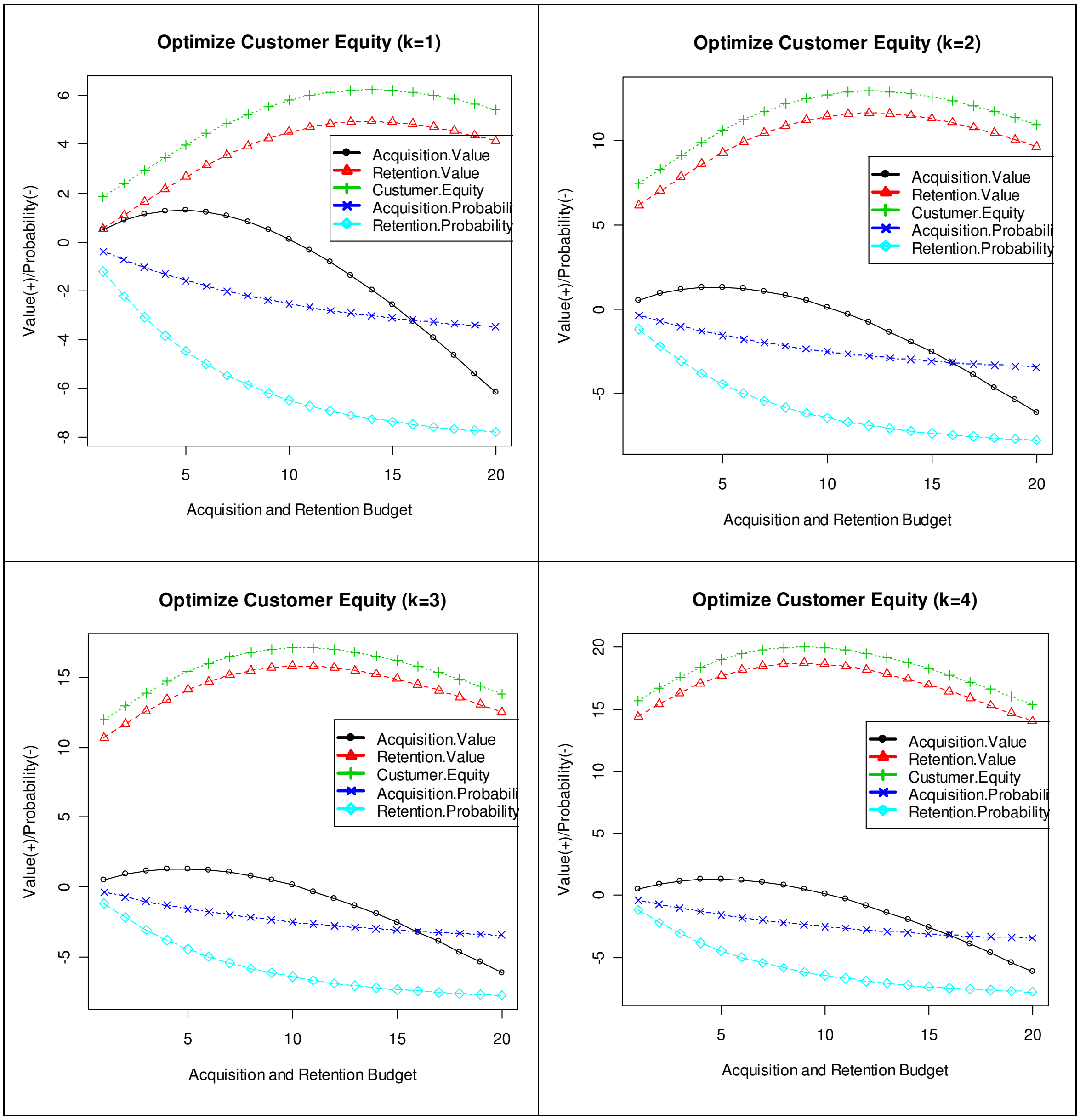
La procédure d'optimisation, adaptée de Blattberg et Deighton (1996), trouve d'abord les dépenses par prospect qui maximisent *la valeur d'acquisition* des clients ($p(A)\,m - A$) et utilise ensuite la probabilité d'acquisition qui résulte (p(A)') pour calculer *la valeur de rétention* maximum ($p(A)'(V^a - m)$). Le capital client (customer equity) maximum est alors la somme des valeurs d'acquisition et de rétention ainsi calculées.

A titre d'illustration nous appliquons cette procédure d'optimisation au modèle de comportement dynamique du client basé sur la distribution négative binomiale et dérivons la formule correspondante de (12):

$$CE^{a}(A,R)=p(A)\left[\left(m-\frac{R}{(1+a)}\right)\left(\frac{1+a}{a}\right)\left(1-\left(\frac{1-p(R)}{1+a-p(R)}\right)^{k}\right)-m\right]+p(A)m-A \quad (13)$$

Pour placer le problème de Blattberg and Deighton (1996) dans une perspective duale d'acquisition et de rétention, il est tout d'abord nécessaire d'exprimer la probabilité d'acquisition comme une fonction des dépenses d'acquisition par prospect, par exemple p(A) = 0.4 (1-exp(-0.1 * A)). Le plafond du taux (probabilité) d'acquisition et son élasticité devraient être plus bas que les paramètres correspondants dans la fonction de réponse rétention, car les prospects sont habituellement moins réactifs à l'effort d'acquisition que ne le sont les clients aux efforts de rétention. Les valeurs optimales peuvent être trouvées graphiquement (voir figure 3).

Figure 3 – Calcul de la LTV du client et optimisation



Avec un budget de 5€ par prospect on atteint une probabilité de réponse (taux d'acquisition) de 0,157. Elle produit la meilleure valeur d'acquisition pour un prospect 0.157*40-5 = 1.29€ et peut être lue sur l'échelle négative de la figure 3. Comme le montre le tableau 5, cette probabilité d'acquisition entre dans le calcul de la valeur de rétention qui atteint un maximum dont la valeur augmente avec le coefficient de tolérance *k* et peut être obtenue avec moins de dépenses de rétention quand *k* et plus grand.

Table 5 – Variation des valeurs optimales de rétention de clients avec le coefficient de tolérance

k	Dépenses de retention optim.	Valeur à long terme (perspective client)	Capital client maximum (perspective prospect)	Capital client maximum (perspective client)
1	14€	71.39€	6.23€	39.58€
2	12€	113.71€	12.90€	81.96€
3	10€	140.50€	17.11€	108.71€
4	9€	158.82€	20.00€	127.07€

Par exemple quand k=1, les dépenses optimum de rétention par client sont de 14€ et correspondent à une valeur à long terme maximum de 71.39€. La valeur de rétention maximum par prospect est de 0.157*(71.39-40) = 4.94€. Le capital (equity) maximum au niveau du prospect est la somme de ses valeurs d'acquisition et de rétention 1.29€ +4.94€= 6.23€. Le capital (equity) maximum de la perspective client peut être facilement dérivé en divisant le capital prospect par la probabilité d'acquisition 6.23€/0.157 = 39.58€. Le résultat est cohérent avec la valeur de 71.39€, valeur client maximum obtenue quand les coûts d'acquisition étaient ignorés.

Conclusions et recherches futures

Comme l'indique Mulhern (1999) les modèles de LTV ne sont pas applicables a toutes les situations. Ils exigent que les clients aient des relations persistantes avec les entreprises et que les flux financiers (gains et dépenses) puissent être prévus avec précision à un niveau individuel. Lorsque ces conditions ne sont pas satisfaites, l'analyse historique de la profitabilité peut remplacer les calculs de LTV. Pourtant, sous les impulsions combinées et interdépendantes des progrès de la technologie de l'information et de l'adoption d'un marketing centré client, les situations pour lesquelles les modèles de LTV sont applicables deviennent dominantes. Dans leur revue de la littérature sur la LTV fréquemment citée, Jain et Singh (2002) identifient trois directions de recherche principales. La première est le développement de modèles de calcul de la LTV qui se concentrent sur les flux de revenus en provenance des clients et sur l'acquisition, la rétention et autres coûts de marketing afin de faciliter le calcul, sur l'allocation des ressources et l'optimisation de la LTV. La deuxième direction de recherche, décrite comme *l'analyse de la base de clientèle*, se concentre sur les méthodes qui prédisent analytiquement la valeur probabiliste des transactions d'une base de clients existante. La dernière direction utilise des modèles analytiques de manière normative et analyse les *implications de la LTV pour la décision managériales*. Notre recherche s'inscrit principalement dans la première et dans la troisième de ces directions et propose de nouvelles formules de calcul de la LTV et des solutions pour leur usage normatif dans des décisions managériales :

- budgétisation des dépenses pour l'acquisition des clients
- sélection des médias de recrutement
- sélection des types d'offres
- répartition des efforts entre prospection et fidélisation
- décisions de réactivation/reconquête des clients
- efforts d'incitation aux migrations de clientèles dans un mix-canaux d'achat ou de service.

Les formules développées dans ce papier pour calculer la LTV présentent un bon degré de généralité le modèle de rétention a été utilisé comme point de départ pour leur développement. Pour faciliter la compréhension les applications présentées ici, seules quelques légères extensions de ce modèle prototypique ont été proposées mais de nombreuses autres applications auraient pu être développées. Ces formules ne sont ni limitées au modèle de rétention ni aux modèles à probabilité constante comme celui basé sur la distribution négative binomiale. Elles sont capables de traiter une large variété de modèles de comportement dynamique du client et vont bien au-delà de la dichotomie des modèles de rétention/migration traditionnellement présente dans la littérature.

Dans le développement des calculs de la LTV, une approche de modélisation progressive a été introduite en utilisant comme point de départ le revenu moyen normalisé d'une cohorte. Elle est bien adaptée aux situations ou les marges et coûts de rétention peuvent être considérés constants dans le temps. Ce revenu moyen normalisé, que nous avons appelé « valeur unitaire présente nette du potentiel transactionnel du client » ou plus succinctement « potentiel transactionnel actualisé », constitue un artefact très convenable. Il encapsule la dynamique des clients et constitue une étape nécessaire pour le développement de calculs encore plus complexes de la lifetime value du client.

Après avoir montré de manière explicite le lien entre le modèle de rétention et la distribution géométrique nous avons recherché la généralisation et proposé un cadre stochastique pour les calculs de la LTV. Les fonctions génératrices, outils importants en théorie des probabilités, ont ainsi été introduites dans les calculs de LTV. Leurs applications dans ce champ de recherche n'en sont qu'en première phase et nécessitent des explorations supplémentaires.

Dans les recherches futures nous comptons étendre le cadre stochastique suggéré à d'autres modèles de la dynamique des clients, dont certains ont été mentionnés ici. Une analyse marketing plus approfondie des modèles de la dynamique des clients caractérisés par les distributions Négative binomiale et Poisson mérite d'être développée.

Dans cette recherche, nous avons posé les bases d'un cadre stochastique assez général pour les calculs de LTV et donné quelques exemples et applications pour illustrer cette approche. Cela s'inscrit dans le lancement d'une nouvelle orientation de recherche destinée à placer les calculs de LTV et leur usage normatif sur un socle stochastique plus sain qui contraste avec l'approche plutôt déterministe qui, de notre point de vue, domine actuellement ce champ.

Références

Berger, P.D. & Nasr, N.I. (1998). Customer Lifetime Value: Marketing Models and Applications. *Journal of Interactive Marketing*, 12 (1), 17–30.

Blattberg, R.C. & Deighton J. (1996). Manage marketing by the customer equity test", *Harvard Business Review,* 74, (4), 136-144.

Blattberg, Robert C., Gary Getz, and Jacquelyn S. Thomas (2001), *Customer Equity*. Boston: Harvard Business School Press.

Calciu M. & Salerno F. (2002), "Customer Value Modeling: Synthesis and Extension Proposals," *Journal of Targeting, Measurement and Analysis for Marketing*, 11 (2), 124–47.

Dwyer, F.R. (1989) "Customer Lifetime Valuation to Support Marketing Decision Making", *Journal of Direct Marketing*, 9(1), 79-84.

Gupta, S., Lehmann, D.R., & Stuart J.A. (2004).Valuing Customers. *Journal of Marketing Research*, 41 (1), 7–18.

Jackson, B.B. (1985), *Winning and Keeping Industrial Customers: The Dynamics of Customer Relationships*. Lexington, MA: Lexington Books.

Jackson, D.R., (1996). Achieving Strategic Competitive Advantage Through the Application of the Long Term Customer Value Concept. *Journal of Database Marketing*, 4(2), 174-186.

Jain D., Singh, S.S., (2002). Customer Lifetime Value Research in Marketing. A Review and Future Directions. Journal of Interactive Marketing, 16(2), 34-46

Kumar V., Ramani G., & Bohling T. (2004). Customer Lifetime Value approaches and best practice applications. *Journal of Interactive Marketing*, 18(3), 60-72.

Mulhern, F.J., (1999). Customer Profitability Analysis: Measurement, Concentration, and Research. *Journal of Interactive Marketing*, 13 (1), 25–40.

Niraj, R., Gupta M., & Narasimhan C., (2001). Customer Profitability in a Supply Chain. *Journal of Marketing*, 65 (3), 1–16.

Reinartz W.J., & Kumar V., (2000). On the Profitability of Long-Life Customers in a Noncontractual Setting: An Empirical Investigation and Implications for Marketing. *Journal of Marketing*, 64(4), 17-35.

Reinartz, W., Thomas, J.S. & Kumar, V., (2005). Balancing Acquisition and Retention Resources to Maximize Customer Profitability." *Journal of Marketing*, 69(1), 63-79,

Rust, R.T., Lemon, K.N. & Zeithaml, V.A., (2004). Return on Marketing: Using Customer Equity to Focus Marketing Strategy. *Journal of Marketing*, 68 (1), 109–127.

Stauss, B., & Friege, C., (1999). Regaining Service Customers. *Journal of Service Research*, 1 (4), 347-361.

Thomas J.S, Blattberg R. & Fox, J., (2004). Recapturing Lost Customers. *Journal of Marketing Research, 41(1),31-45.*